





OVER ELKAAR SNIJDENDE NORMALEN AAN EEN ELLIPSOÏDE EN EEN HYPERELLIPSOÏDE.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE

RIJKS-UNIVERSITEIT TE GRONINGEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. M. E. MULDER,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER MEDICIJNEN.

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

op Maandag 4 Mei 1908, des namiddags te 3 uur,

DOOR

WILLEM VAN DER WOUDE,
geboren te Ooster-Nijkerk.

H. P. TER BRAAK — 1908 — DEVENTER.

OVER ELKAAR SNIJDENDE NORMALEN AAN EEN ELLIPSOÏDE EN EEN HYPERELLIPSOÏDE.

o

OVER ELKAAR SNIJDENDE NORMALEN AAN EEN ELLIPSOÏDE EN EEN HYPERELLIPSOÏDE.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE

RIJKS-UNIVERSITEIT TE GRONINGEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. M. E. MULDER,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER MEDICIJNEN.

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

op Maandag 4 Mei 1908, des namiddags te 3 uur,

DOOR

WILLEM VAN DER WOUDE,
geboren te Ooster-Nijkerk.

H. P. TER BRAAK — 1908 — DEVENTER.

AAN MIJNE OUDERS.

De aanbieding van dit proefschrift geeft mij een welkome gelegenheid, mijn dank te betuigen aan U Hooggeleerden, Professoren in de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen, wier lessen ik heb mogen volgen — alsmede aan U, Hooggeleerde WIND, *eertijds Lector aan de Universiteit te Groningen.*

In de eerste plaats richt ik mij hiermede tot U, Hooggeleerde SCHOUTE, *Hooggeachte Promotor, die mij ook na het verlaten der academie, bij de samenstelling van dit proefschrift leiding hebt willen geven. Uwe groote bereidwilligheid, de moeite, die Gij U daarbij hebt willen getroosten, hoop ik steeds in dankbare herinnering te houden.*

STOOMDRUKKERIJ „DAVO", DEVENTER.

HOOFDSTUK I.

NORMALEN AAN DE ELLIPS.

§ 1. Laat ε een ellips voorstellen en A een punt in haar omtrek. Uit A kunnen wij 3 normalen in punten van de ellips trekken, de normaal in A zelf niet meegeteld. De voetpunten dier normalen noemen wij B, C en D (fig. I). Verplaatsen wij nu een punt T langs de lijn AB, dan kunnen wij uit dat punt telkens 3 normalen aan ε trekken, behalve TB. Verbinden wij de voetpunten van die normalen, die uit een zelfde punt van AB getrokken zijn, dan omhullen die verbindingslijnen een parabool π, die o. a. door AC, AD, CD en de beide assen van ε wordt aangeraakt.

§ 2. Deze parabool kunnen wij ook op de volgende wijze voortbrengen. Wij duiden de pool van CD door P aan en trekken door P een willekeurige lijn q, wier pool Q dus op CD moet liggen; daarna trekken wij QR $\perp$ op q.

Laten wij nu q om P draaien, dan omhult QR een parabool, daar QR steeds de overeenkomstige punten verbindt van 2 projectieve puntreeksen, waarvan de ééne op CD, de andere op de oneindig ver gelegen lijn ligt.

Ook deze parabool wordt aangeraakt door AC, AD, CD en de beide assen van ε; zij valt dus samen met de parabool π.

Bij deze voortbrenging blijkt tevens, dat de beide raaklijnen aan π door P loodrecht op elkaar staan; dat is ook 't geval in het middelpunt O van ε; OP is dus de richtlijn van π.

§ 3. De pool van QR ligt op q. Trekken wij uit de pool U van QR een loodlijn op QR, dan zal die loodlijn dus 't punt P bevatten.

Nu is QR een willekeurige raaklijn aan de parabool π.

Nemen wij van een willekeurige raaklijn van de parabool π de pool met betrekking tot ε en laten wij uit dat punt een loodlijn neer op zijn poollijn, dan zal die loodlijn dus steeds 't punt P bevatten.

Hieruit volgt dus deze stelling, die door Desboves genomen is als grondslag van zijn »Théorie Nouvelle des Normales« [1]):

»*Trekken wij uit een punt T van de normaal AB de 3 andere normalen en verbinden wij de voetpunten dier normalen, dan zullen de 3 loodlijnen, uit de polen dier verbindingslijnen op hunne poollijnen neergelaten, door één punt P gaan. Dit punt verandert niet, als T langs AB verschoven wordt.*«

Uit 't bewijs volgt ook, dat de hyperbool van Apollonius van 't punt P de meetkundige plaats is van de polen dier verbindingslijnen. De raaklijnen van de parabool π zijn dus polair toegevoegd aan de punten van die hyperbool.

§ 4. Trekken wij uit een punt van AB 3 normalen aan ε en beschrijven wij een cirkel om den driehoek, gevormd door de verbindingslijnen van de voetpunten dier normalen, dan zal die cirkel ε voor de vierde maal maal snijden in E, 't tegenover B gelegen punt.

Van deze stelling — van Joachimsthal [2]) — geef ik hier

1) Desboves: Théorie Nouvelle des Normales aux surfaces du second ordre; Parijs, Mallet-Bachelier, 1862.

2) Crelle's Journal, 1843, deel 26, stuk 2, pag. 172.

een ander bewijs, omdat de daarbij gebruikte methode in 't vervolg herhaaldelijk aangewend zal worden.

Daartoe leiden wij eerst de volgende hulpstelling af: *Bestaat op een kegelsnee* C_2 *een involutie van den derden graad, waarbij de beide in 't oneindige gelegen punten van* C_2 *tot een zelfde drietal behooren, dan zullen alle cirkels, die* C_2 *in 3 toegevoegde punten der involutie snijden, nog een vierde punt met haar gemeen hebben, dat voor allen 't zelfde is; bovendien vormen deze cirkels een bundel.*

Bewijs: Verbinden wij de toegevoegde punten der involutie onderling, dan wordt door deze verbindingslijnen een parabool π omhuld.

Zijn nu V_1, V_2 en V_3 3 toegevoegde punten, dan snijdt de cirkel door V_1, V_2 en V_3 C_2 nog in een vierde punt, dat wij S noemen. Wij nemen op C_2 nog 2 punten W_1 en W_2, die tot een zelfde drietal van toegevoegde punten behooren maar overigens willekeurig gekozen zijn. Door W_1, W_2 en S brengen wij een tweeden cirkel; door de beide cirkels $V_1V_2V_3S$ en W_1W_2S is nu een cirkelbundel bepaald, waarvan één der basispunten S op C_2 ligt. Elk der cirkels uit dezen bundel snijdt C_2 behalve in 't vaste punt S nog in 3 andere punten; hierdoor ontstaat op C_2 een tweede involutie van den derden graad.

Verbinden wij weer de toegevoegde punten dezer tweede involutie onderling, dan omhullen deze verbindingslijnen een tweede parabool. Deze nieuwe parabool valt echter samen met de parabool π, daar zij 5 raaklijnen met π gemeen heeft, n.l. de zijden van driehoek $V_1V_2V_3$, W_1W_2 en de lijn l_∞ in 't oneindige. De beide involuties op C_2 vallen dus ook samen; elke cirkel uit den bundel snijdt dus C_2, behalve in 't vaste punt S, nog in 3 toegevoegde punten der eerste involutie; hiermee is dus de hulpstelling bewezen.

Zij nu AB de normaal aan ε in 't punt B, dan kunnen wij een involutie van den derden graad op ε voortbrengen

door uit alle punten van AB de 3 andere normalen aan ε te trekken; de in 't oneindig gelegen punten van deze kegelsnee behooren dan tot een zelfde drietal. Elke cirkel door de 3 voetpunten van normalen, uit een zelfde punt T van AB getrokken, snijdt ε dan nog in een vast punt; door T op een der assen te nemen blijkt, dat dit vierde snijpunt diametraal tegenover B ligt, q. e. d.

Opmerking: De uitbreiding, door Tesch [1]) aan de stelling van Joachimsthal gegeven, bewijzen wij door dezelfde hulpstelling.

Onder de α-normaal in B aan ε verstaan wij: de lijn door B, die met de raaklijn in B aan ε getrokken, een hoek α maakt; hierbij moet de hoek α in een bepaalden zin gemeten worden, d. w. z. α is de hoek, waarover wij de raaklijn in B in een bepaalde richting moeten draaien om haar in den stand van de α-normaal te brengen.

Zij nu AB een α-normaal aan ε in 't punt B, en trekken wij uit alle punten van AB α-normalen aan ε, dan ontstaat daardoor weer een involutie van den derden graad op ε, waarbij de snijpunten van ε met l_∞ tot een zelfde groep behooren. Alle cirkels, gebracht door de voetpunten van α-normalen, die elkaar in een punt van AB snijden, hebben dus als vierde snijpunt met ε een vast punt. Dit vierde snijpunt willen wij bepalen. Brengen wij een cirkel door de voetpunten der α-normalen, uit B aan ε getrokken, dan snijdt ook deze ε nog in dat vaste punt. Nu brengen wij op ε een nieuwe involutie voort; daartoe laten wij α alle waarden doorloopen van 0° tot 180°, en trekken voor elke waarde van α de α-normalen uit B aan ε. Ook deze nieuwe involutie is van den derden graad; wij bepalen nu eerst 't drietal van punten, dat voortgebracht wordt door α nul te nemen. Daarvoor moeten wij 3 punten op ε aangeven, waarin de raaklijn aan ε evenwijdig is aan de verbindingslijn met B.

---

1) Wiskundige Opgaven van 't Wiskundig Genootschap, Nieuwe Reeks, 2de deel (1882—86), pag. 264.

Deze 3 punten zijn 't punt B zelf en de beide snijpunten van ε met l_{∞} ; ook bij deze nieuwe involutie behooren dus de in 't oneindige gelegen punten van ε tot een zelfde drietal.

Alle cirkels, door 3 toegevoegde punten dezer involutie gebracht, hebben met ε nog steeds 't zelfde vaste snijpunt gemeen. Door $\alpha = 90^0$ te nemen blijkt, dat dit punt 't diametraal tegenover B gelegen punt is.

Zij dus T een willekeurig punt van de α-normaal AB, dan is hiermee bewezen:

Trekt men uit een punt T van de α-normaal TB de 3 andere α-normalen aan een ellips ε, en beschrijft men een cirkel door de voetpunten dier α-normalen, dan zal die cirkel ε voor de vierde maal snijden in een punt, dat diametraal tegenover B ligt.

Dit is de stelling van Tesch.

§ 5. Wij verstaan nu verder, in navolging van Laguerre, onder »centrum« van een lijn met betrekking tot een gegeven rechthoekig coördinatenstelsel »'t punt, waarvan de coördinaten de tegengestelden zijn van de stukken, door die lijn van de assen gesneden.«

Zoo wordt in fig. 2 't centrum van de lijn l, die de stukken x_1 en y_1 van de coördinaatassen snijdt, gevonden door een punt A' te bepalen, waarvan $-x_1$ en $-y_1$ de coördinaten zijn.

Omtrent deze centra bewijzen wij de volgende stellingen:

I. Draait een lijn om een punt, dan doorloopt 't centrum van die lijn een gelijkzijdige hyperbool, die door den oorsprong en de oneindig ver gelegen punten der assen gaat.

II. Doorloopt een punt een lijn, dan omhult de lijn, wier centrum 't genoemde punt is, een parabool, die de assen aanraakt.

Wij laten — om stelling I te bewijzen — een lijn l draaien om een punt P en wenschen de meetkundige plaats te bepalen van 't punt A, waarvan de coördinaten gelijk zijn aan de stukken, daarbij telkens door l van de assen afge-

sneden. Draait nu l om P, dan wordt A gevonden als meetkundige plaats van 't snijpunt der overeenkomstige lijnen van 2 stralenbundels, wier toppen oneindig ver liggen, en die projectief verwant zijn, doch niet perspectief gelegen, want l_{∞} stemt niet met zich zelf overeen. 't Punt A beschrijft dus een kegelsnee. Daar de oneindig ver gelegen punten der assen op die kromme liggen, is deze kegelsnee een gelijkzijdige hyperbool; zij bevat ook den oorsprong.

Het punt A ligt diametraal tegenover 't punt, dat wij 't centrum van l noemden. Draait een lijn l om één zijner punten, dan brengt 't centrum van die lijn dus een gelijkzijdige hyperbool voort, die door den oorsprong en de oneindig ver gelegen punten der assen gaat.

Stelling II wordt op geheel overeenkomstige wijze bewezen.

Beide stellingen zijn omkeerbaar. Want wij kunnen bewijzen:

I*a*. De lijnen, wier centra op een gelijkzijdige hyperbool liggen, die den oorsprong en de oneindig ver gelegen punten der assen bevat, vormen een stralenbundel.

II*a*. De centra der raaklijnen van een parabool, die door de assen wordt aangeraakt, liggen op een rechte lijn.

Wij bewijzen weer slechts I*a*.

Projecteeren wij de hyperbool punt voor punt op de beide assen, dan ontstaan op de assen perspectieve puntreeksen. De verbindingslijnen der overeenkomstige punten snijden elkaar dus in één punt; dus snijden ook de lijnen, wier centra op de hyperbool liggen, elkaar in één punt.

§ 6. Wij beschouwen nu weer de ellips ε en de parabool π, die omhuld wordt door de verbindingslijnen der voetpunten van normalen, die elkaar in één punt T van de normaal AB snijden. Deze parabool π wordt ook aange-

raakt door de symmetrie-assen van ε; de centra der raaklijnen van π vormen dus (volgens II*a*) een lijn. Zij nu (fig. 3) B_1 't punt, dat t. o. v. de as OX symmetrisch ligt met B, en stellen X_1 en X_2 de snijpunten van de X as met ε voor, dan zijn B_1X_1 en B_1X_2 raaklijnen van π, zooals blijkt door T in OX te nemen. Noemen wij L 't punt, waarvan de coördinaten gelijk zijn aan de stukken door B_1X_1 van de assen gesneden, en E 't diametraal tegenover B gelegen punt, dan willen wij nu eerst bewijzen, dat L ligt op de raaklijn e in E aan ε getrokken.

Daarvoor beschouwen wij de ellips ε als de projectie van een cirkel; in fig. 3[a] nu is een cirkel getrokken, waarvan OX en OY 2 loodrecht op elkaar staande middellijnen zijn. Uit X_1 — één der snijpunten van OX met den cirkel — is een koorde X_1B_1 getrokken; daarna is een punt L bepaald, waarvan de coördinaten, t. o. v. de assen OX en OY, gelijk zijn aan de stukken door X_1B_1 van die assen gesneden; verder is op den cirkelomtrek 't punt E genomen, dat t. o. v. de Y-as symmetrisch gelegen is met B_1. Bewijzen wij nu, dat L in fig. 3[a] ligt op de raaklijn in E aan den cirkel, dan volgt hieruit, dat L in fig. 3 ligt op de raaklijn in E aan de ellips ε. Is in fig. 3[a] X_2 't tweede snijpunt van de X-as met den cirkel, dan zijn B_1X_1 en EX_2 elkaars spiegelbeelden met betrekking tot de as OY en is het snijpunt dier lijnen dus een punt G der as OY. Hieruit volgt, dat $\angle X_1EG$ recht is; denken wij ons een cirkel met X_1G als middellijn, dan liggen X_1, O, G, E en L dus op dien cirkel. Nu is ook OL een middellijn van dien cirkel, dus ook $\angle$ LEO is recht; dus is LE een raaklijn aan den cirkel, die O tot middelpunt heeft en door E gaat.

Keeren wij tot fig. 3 terug, dan is hiermee bewezen, dat LE een raaklijn aan de ellips ε is. 't Centrum L′ van B_1X_1 ligt dus op de raaklijn in B aan ε; eveneens ligt 't centrum van B_1X_2 op die raaklijn. De raaklijn in B aan ε is dus de meetkundige plaats der centra van de lijnen, die π omhullen.

Trekken wij nu uit B een willekeurige lijn, die ε nog in V_1 snijdt, en noemen we V_2 en V_3 die punten van ε, wier normalen elkaar en de normaal in V_1 in een zelfde punt van AB snijden, dan ligt zoowel 't centrum van V_2V_3 als de pool van V_1B op de raaklijn in B. Doorloopt V_1 de ellips ε, dan beschrijft BV_1 dus een stralenbundel om B, terwijl V_2V_3 de parabool π omhult; op de raaklijn in B aan ε worden dan 2 projectieve puntreeksen voortgebracht. Uit 't voorgaande blijkt echter, dat de pool van BX_2 samenvalt met 't centrum van B_1X_1, en de pool van B_1X_1 dit eveneens doet met 't centrum van B_1X_2, m. a. w. wij kunnen van deze beide projectieve puntreeksen onmiddellijk 2 samenvallende overeenkomstige elementen aanwijzen. Noemen wij B_2 't punt, dat symmetrisch ligt met B t. o. v. de Y-as, dan zijn er nog 2 paren samenvallende toegevoegde punten aan te wijzen. De beide puntreeksen zijn dus niet alleen projectief, maar vallen samen; de pool van de willekeurig uit B getrokken lijn V_1B is dus tegelijkertijd 't centrum van V_2V_3. Hiermee is dus bewezen:

Verbinden wij 2 aan 2 de voetpunten der 4 normalen, die uit eenig punt aan een ellips getrokken zijn, dan is de pool van één dier verbindingslijnen steeds 't centrum van de andere.

Deze stelling is afkomstig van Joachimsthal.

Opmerking: In figuur I zijn uit 't punt A, op de ellips ε gelegen, 3 normalen in de punten van B, C en D getrokken; 't punt P, dat de pool is van CD, is dus 't centrum van AB. De stelling, in § 3 bewezen, kunnen wij dus nog hiermee aanvullen:

Het punt P is 't centrum van AB.

§ 7. In § 4 vonden wij: beschrijven wij cirkels om de driehoeken, die gevormd worden door de verbindingslijnen van de voetpunten der normalen, die elkaar in een punt van de normaal AB snijden, dan vormen die cirkels een

bundel. Een der basispunten van dien bundel is E (fig. 3); wij willen nu 't andere basispunt bepalen. 't Is duidelijk, dat 't gevraagde punt 't brandpunt van de parabool π is; want elke cirkel, die om een raaklijnendriehoek eener parabool beschreven is, moet 't brandpunt van die parabool bevatten. Wij beschouwen hier *de raaklijnen van* π als de meetkundige plaats der lijnen, wier centra op BL′ liggen; wij brengen nu cirkels om de driehoeken, die gevormd worden door de symmetrie-assen van ε en telkens één der andere raaklijnen van π Wij kunnen in de eerste plaats opmerken, dat al deze cirkels 2 punten gemeen zullen hebben, nl. O en 't brandpunt van de parabool π; zij vormen dus een tweeden bundel met deze 2 punten tot basispunten. Om het tweede basispunt te bepalen is nu in fig. 3^b een gedeelte van fig. 3 overgenomen; daarin is Q′ een willekeurig punt van BL′, Q 't diametraal tegenover Q′ gelegen punt en q de lijn, waarvan Q′ 't centrum is; q is dus een raaklijn van π. 't Middelpunt van den cirkel, beschreven om den driehoek, waarvan de symmetrie-assen van ε en q de zijden zijn, is dus M — 't midden van OQ. Dit punt ligt op de lijn C′C″, die evenwijdig aan EL getrokken is en den afstand van O tot EL halveert. De meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die beschreven kunnen worden om de driehoeken, waarvan de symmetrie-assen van ε en telkens één der andere raaklijnen aan π de zijden zijn, is dus de lijn C′C″. De basispunten van dezen cirkelbundel zijn dus O en 't voetpunt van de loodlijn uit O op EL neergelaten. Dit laatste punt, dat wij F noemen, is dus 't brandpunt van π en ook 't tweede basispunt van den boven genoemden cirkelbundel.

Is AB de normaal aan de ellips ε *in B en beschrijven wij cirkels om de driehoeken, gevormd door de verbindingslijnen van de voetpunten der normalen, die elkaar in een punt van AB snijden, dan zullen deze cirkels dus een bundel vormen, waarvan de basispunten zijn: E — 't diametraal*

tegenover B gelegen punt — (aangegeven door Joachimsthal) en F — 't voetpunt van de loodlijn uit het middelpunt O van ε op de raaklijn in E neergelaten — (aangegeven door de Longchamps [1])).

§ 8. Noemen wij — in figuur 4 — een willekeurig punt van AB weer T, en brengen wij den cirkel aan, die de voetpunten bevat der 3 normalen uit T aan ε getrokken, dan zal 't middelpunt van dezen cirkel dus liggen op de lijn N'N'', die EF loodrecht middendoor deelt en dus evenwijdig aan AB is.

Laten wij T een puntreeks beschrijven op AB, dan beschrijft 't middelpunt van den cirkel op N'N'' een puntreeks, die projectief is met de eerste. Deze beide puntreeksen zijn niet alleen projectief, maar ook perspectief. Nemen wij n.l. voor T 't oneindig ver gelegen punt van AB, dan gaat de cirkel van Joachimsthal over in de raaklijn EF; beschouwen wij die lijn als een cirkel, dan is het middelpunt 't oneindig ver gelegen punt van N'N''. 't Snijpunt der lijnen AB en N'N'' komt dus met zich zelf overeen; de beide puntreeksen zijn dus perspectief. Alle lijnen, die 2 toegevoegde punten der puntreeksen verbinden, moeten elkaar dus in één punt snijden; dit punt willen wij nader bepalen.

Noemen wij T_1 en T_2 de snijpunten van AB met de assen, en S 't punt, waarvan de coördinaten gelijk zijn aan de stukken door AB van de assen gesneden, dan ligt S diametraal tegenover P — 't centrum van AB; noemen wij verder U 't snijpunt van PS met AB en V 't snijpunt van PS met de normaal in E, dan is $SU = UO = OV = VP$. De lijn N'N'', die evenwijdig aan OF en de normaal in E is en den afstand van deze beide evenwijdige lijnen middendoor deelt, deelt dus ook den afstand van P tot AB middendoor. Verbinden wij nu P met T_1, dan zal die lijn

[1]) Nouvelle Correspondance Mathématique, tome IV, 1878, pag. 279.

door N'N″ middendoor gedeeld worden. Het segment PT_1 wordt echter ook middendoor gedeeld door de Y-as, daar in driehoek PST_1 de Y-as de lijn PS halveert en evenwijdig aan ST_1 is. De Y-as en de lijnen N'N″ en PT_1 snijden elkaar dus in één punt; dat punt noemen wij N_1. Dit punt N_1 is 't middelpunt van den cirkel, beschreven door de voetpunten der 3 normalen uit T_1 getrokken, en N_1 en T_1 zijn dus toegevoegde punten der puntreeksen op N'N″ en AB. De lijn N_1T_1, die 2 toegevoegde punten dezer puntreeksen verbindt, bevat dus P.

Noemen wij 't snijpunt van N'N″ met de Y-as N_2, dan zal de lijn N_2T_2, die ook toegevoegde punten der beide puntreeksen verbindt, eveneens door P gaan; dus zal P 't snijpunt zijn van alle lijnen, die een paar toegevoegde punten verbinden. Daar nu elke lijn, die P verbindt met eenig punt van AB, door N'N″ wordt middendoor gedeeld, volgt hieruit:

Trekt men uit eenig punt T de 4 normalen aan een ellips, en brengt men een cirkel door 3 der voetpunten, dan is 't middelpunt van dien cirkel 't midden van de lijn, die T met 't centrum van de vierde normaal verbindt. [1])

§ 9. Is nu weer T een willekeurig punt op AB, en zijn V_1, V_2 en V_3 de voetpunten der normalen uit T aan ε getrokken, dan snijdt de cirkel (V_1, V_2, V_3) de hyperbool H_2 van Apollonius van 't punt T behalve in die 3 voetpunten, nog in een vierde punt.

Dat vierde punt willen wij bepalen. Daarvoor merken wij op, dat driehoek $V_1V_2V_3$ in H_2 is ingeschreven en om den parabool π is omgeschreven; er zijn dus oneindig veel driehoeken, die deze eigenschap bezitten. Wij kunnen dus de raaklijnen van π samenvatten in groepen van 3, zoodat

---

[1]) Deze stelling is van Joachimsthal en te vinden in 't vroeger aangehaalde artikel in Crelle's Journal, 26,2; J. gebruikt echter niet de uitdrukking »centrum« van een lijn.

ze driehoeken vormen, die ingeschreven zijn in H_2; hierdoor ontstaat dus op H_2 een involutie van den derden graad. Een drietal van toegevoegde punten wordt hierbij gevormd door O, X_∞ en Y_∞ — d. w. z. 't middelpunt van ε en de snijpunten der symmetrie-assen van ε met l_∞ —, daar deze 3 punten op H_2 liggen en de zijden van driehoek $OX_\infty Y_\infty$ de parabool π raken. De beide in 't oneindige gelegen punten van H_2 maken dus deel uit van een zelfde drietal van toegevoegde punten dezer involutie. Alle cirkels, die H_2 in 3 punten van deze involutie snijden, vormen dus een bundel; één der basispunten van dezen bundel ligt op H_2 (hulpstelling § 4).

Verder is 't duidelijk, dat 't andere basispunt van den bundel 't punt F is, 't brandpunt der parabool π. Wij brengen nu uit dezen bundel den cirkel aan, die door de punten O, X_∞ en Y_∞ gaat; deze cirkel ontaardt in l_∞ en een tweede lijn, die O en F moet bevatten; die tweede lijn is dus OF. 't Vaste snijpunt van de cirkels uit dezen bundel met H_2 is dus gelegen op OF.

Hiermee is dus bewezen:

Trekken wij uit een punt T 4 normalen aan een ellips en door 't middelpunt van die ellips een lijn evenwijdig aan één dier normalen, dan ligt 't tweede snijpunt van die lijn met de hyperbool van Apollonius van 't punt T op den omtrek van den cirkel, die de voetpunten der 3 andere normalen bevat.

Opmerking: Hoewel wij T op AB willekeurig gekozen hebben, bevat de cirkel door de 3 voetpunten V_1, V_2, V_3 der normalen, uit T aan ε getrokken, steeds de punten E en F; 't middelpunt N ligt op de lijn, die EF loodrecht middendoor deelt en dus evenwijdig aan OF is. Hieruit volgt, dat 't tweede snijpunt van OF met dezen cirkel ook op EN ligt. Het vierde snijpunt van de hyperbool van Apollonius van een punt T met den cirkel $(V_1V_2V_3)$ is dus aldus te vinden:

Bepaal eerst 't middelpunt N van dezen cirkel (§ 8), dan is 't snijpunt van EN en OF 't gevraagde punt.

§ 10. Wij noemen weer P 't centrum van de normaal AB, en zoeken nu de meetkundige plaats van P, als wij AB vervangen door de normalen in alle punten van ε. Van deze meetkundige plaats bepalen wij eerst de snijpunten met de symmetrie-assen van ε; 't is duidelijk, dat de eenige normaal, wier centrum op één der assen ligt, deze as zelf is. Zij nu X_1 één der toppen van de X as, dan is 't centrum van deze as, als de normaal in X_1 beschouwd, 't punt, dat diametraal tegenover 't kromtemiddelpunt van X_1 ligt; noemen wij X_2 de andere top van dezelfde as, dan is dit centrum dus 't kromtemiddelpunt van X_2. Beide assen snijden de gevraagde meetkundige plaats dus alleen in de kromtemiddelpunten hunner toppen.

Ook de snijpunten van elke andere middellijn van ε met de gevraagde meetkundige plaats zijn gemakkelijk aan te geven; daar P 't centrum is van AB, is OP antiparallel met AB ten opzichte van de assen van ε. Elke willekeurige middellijn is t. o. v. de assen van ε antiparallel met 2 der normalen van ε; de centra van deze normalen zijn hare eenige snijpunten met de gevraagde meetkundige plaats, daar uit 't voorgaande reeds gebleken is, dat O niet op deze meetkundige plaats ligt.

De gevraagde meetkundige plaats is dus een kromme van den tweeden graad; 't is duidelijk, dat geen harer punten in 't oneindig gelegen is, en dat ze symmetrisch is t.o.v. de assen van ε; zij is dus een ellips, die het middelpunt en de assenrichtingen met ε gemeen heeft, terwijl de toppen harer assen samenvallen met de kromtemiddelpunten van de toppen der assen van ε.

§ 11. Wij kunnen 't voorafgaande aldus resumeeren: Trekken wij in een punt B van een ellips ε de normaal aan ε, en zij A 't tweede snijpunt van die normaal met ε, dan

kunnen wij uit elk punt van AB nog 3 normalen aan ε trekken — AB niet meegeteld.

Verbinden wij de voetpunten der normalen, die uit een zelfde punt van AB getrokken zijn, dan omhullen die verbindingslijnen een parabool π, die polair toegevoegd is aan de hyperbool van Apollonius van 't punt P — 't centrum van AB. De centra der raaklijnen aan π vormen de raaklijn in B aan ε, terwijl de lijnen, wier centra de punten van de hyperbool van Apollonius van 't punt P zijn, een stralenbundel om B vormen.

Beschrijven wij cirkels om de driehoeken, gevormd door de voetpunten der normalen, uit een zelfde punt van AB getrokken, dan snijden die cirkels allen ε voor de vierde maal in E — 't diametraal tegenover B gelegen punt —, terwijl zij onderling nog een punt gemeen hebben n.l. F — 't snijpunt van de raaklijn in E aan ε met de loodlijn uit 't middelpunt van ε op haar neergelaten. 't Middelpunt van een cirkel door 3 der voetpunten is 't midden van de lijn, die P verbindt met 't punt waaruit de normalen zijn getrokken. Zij T een willekeurig punt op AB, dan snijdt de cirkel, door de voetpunten der normalen uit T aan ε getrokken, de hyperbool van Apollonius van 't punt T voor de vierde maal in een punt van de lijn OF, die door 't middelpunt van ε evenwijdig aan AB getrokken is. Vervangen wij AB door alle andere normalen aan ε, dan is de meetkundige plaats van de centra dier normalen — m. a. w. de meetkundige plaats van P — een ellips, die met ε 't middelpunt en de richtingen der assen gemeen heeft.

Trekt men uit eenig punt van deze ellips de raaklijnen aan ε en in de beide raakpunten de normalen, dan zal 't snijpunt van die beide normalen in den omtrek van ε liggen.

HOOFDSTUK II.

SNIJDENDE NORMALEN AAN DE ELLIPSOÏDE.

§ 12. Bij de volgende beschouwingen zal ik mij bedienen van eenige benamingen, die ik uit Reye [1]) overneem en hier vooropzet.

Is E een ellipsoïde, φ een vlak, Q de pool van φ ten opzichte van E en q de loodlijn uit Q op φ neergelaten, dan zal de lijn q haar polair toegevoegde loodrecht kruisen. De lijn q, evenals elke lijn, die de laatstgenoemde eigenschap bezit, heet nu een *as*; Q is de *pool* van deze as en 't snijpunt (q, φ) is haar *voetpunt.*

Hieruit volgt, dat elke normaal aan E een as is en eveneens elke lijn, die de voetpunten van 2 snijdende normalen verbindt; omgekeerd zullen de normalen, die in de snijpunten van een as met E getrokken worden, elkaar snijden.

Verder vermeld ik hier (zonder bewijs) eenige der belangrijkste eigenschappen van deze assen en hunne polen. (Reye, deel II).

Is weer (fig. 5) φ een willekeurig vlak, Q de pool van φ, q de loodlijn uit Q op φ neergelaten, P 't voetpunt der as q en ε de doorsnee van φ met de ellipsoïde E, dan zal de lijn, die de raakpunten verbindt der raaklijnen, uit P aan ε getrokken, polair toegevoegd zijn aan q; deze lijn noemen wij q_1. De assen in φ omhullen nu een parabool, die o. a. aangeraakt wordt door de symmetrie-assen van ε

1) Dr. Th. Reye, Geometrie der Lage, II.

en de in φ gelegen normalen aan E. De as q_1 is de meetkundige plaats der polen van deze assen; hare snijpunten met ε zijn de voetpunten der beide normalen aan E in φ. Liggen dus 2 assen in één vlak, dan is de verbindingslijn hunner polen ook een as; en omgekeerd: 2 assen snijden elkaar, als de verbindingslijn hunner polen een as is.

Noemen wij M 't middelpunt van ε, dan is PM de richtlijn van deze assenparabool. Is φ een middelvlak van E, dan ontaardt de assenparabool in 2 stralenbundels; de top van één dezer bundels is 't middelpunt van E, terwijl de andere bundel uit evenwijdige lijnen bestaat.

Beschouwen wij nu verder de assen, die door 't punt Q gaan; deze vormen een kegel van den tweeden graad, die de kegel van Chasles van Q genoemd wordt. De kegel van Chasles van Q en de assenparabool in φ zijn polair aan elkaar toegevoegd. De meetkundige plaats der polen van alle door Q gaande assen is een ruimtekromme van den derden graad, de kromme van Steiner van Q. Op de kromme van Steiner van elk willekeurig punt liggen de punten O, X_∞, Y_∞, Z_∞ — d. w. z. 't middelpunt van E en de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen van E. De 6 snijpunten van de kromme van Steiner van Q met E zijn de voetpunten der normalen, die uit Q aan E getrokken kunnen worden. Elke koorde van een kromme van Steiner is een as.

Nemen wij Q aan in een der symmetrievlakken van E, dan ontaardt de kromme van Steiner van Q in een kegelsnee en een rechte lijn; deze kegelsnee is de hyperbool van Apollonius van Q t. o. v. de in dat symmetrievlak gelegen hoofdellips, terwijl de lijn loodrecht op dat symmetrievlak staat. Nemen wij eindelijk Q aan in 't oneindig ver gelegen vlak V_∞, dan ontaardt de kromme van Steiner van Q ook in een kegelsnee en een rechte lijn; de kegelsnee is weer de hyperbool van Apollonius van Q t. o. v. de doorsnee van V_∞ met E, terwijl de lijn een middellijn van E is. Daar de assen in een willekeurig punt Q een

kegel van den tweeden graad vormen en — wat hiermee moet samengaan — in een willekeurig vlak φ een kegelsnee omhullen, vormen ze een complex van den tweeden graad. Dit complex is het bekende tetraedrale complex van Reye met vier hoofdpunten en vier hoofdvlakken, de hoekpunten en zijvlakken van het poolviervlak $OX_\infty Y_\infty Z_\infty$. Elke lijn door een dier punten en elke lijn in een dier vlakken is as.

§ 13. Trekken wij in alle punten van de doorsnee van een willekeurig vlak φ met de ellipsoïde E de normalen aan E, dan vormen deze een regeloppervlak van den vierden graad, *normalie* genaamd, met een kromme van den derden graad als dubbelkromme. Daar deze kromme van den derden graad in 't algemeen geen enkel dubbelpunt heeft, zullen ook in 't algemeen op ε — de doorsnee van φ met E — geen 3 punten aanwezig zijn, wier normalen elkaar in een zelfde punt snijden.

Tot hetzelfde besluit komen wij langs een anderen weg, waarbij dan tevens blijkt, wanneer dat geval zich wèl voordoet.

Laten wij uit Q, de pool van φ (fig. 5), de loodlijn q op φ neer en noemen wij 't voetpunt van die loodlijn P, bepalen wij daarna op ε de punten C en D, waarvan de raaklijnen aan ε door P gaan, dan liggen de normalen in C en D aan E in 't vlak φ. 't Snijpunt dier normalen noemen wij A; de assen in 't vlak φ omhullen nu een parabool, die door CA en DA wordt aangeraakt. De driehoek CAD is dus omgeschreven om die parabool.

Wij onderscheiden nu 2 gevallen:

1°. A ligt niet in den omtrek van ε,

2°. A ligt in den omtrek van ε.

In 't eerste geval — 't algemeene — is driehoek CAD niet ingeschreven aan de ellips ε; geen enkele driehoek, die om de parabool beschreven is, zal dan in ε beschreven zijn. Zij V_1 een willekeurig punt van ε en zijn V_1V_2 en V_1V_3 de beide in φ liggende assen door V_1, waarbij V_2 en V_3 de tweede snijpunten met ε zijn, dan zijn V_1V_2 en

V_1V_3 dus raaklijnen aan die parabool, maar V_2V_3 is dit niet en dus ook geen as. De normaal in V_1 aan *E* zal dus de normalen in V_2 en V_3 snijden; de normalen in V_2 en V_3 snijden elkaar echter niet; wij kunnen dus op ε geen enkel drietal van punten aanwijzen, waar de normalen aan *E* elkaar in één punt snijden.

In 't tweede geval — A ligt in den omtrek van ε — is driehoek ACD omgeschreven aan de assenparabool en ingeschreven aan de ellips ε.

Wij hebben dan in den omtrek van ε reeds 3 punten, die voetpunten zijn van normalen aan *E*, die elkaar in één punt snijden, nl. C, D en A, en 't snijpunt hunner normalen is A.

Nu is driehoek ACD ingeschreven in ε en omgeschreven om de assenparabool; er zijn dus oneindig veel driehoeken, die deze eigenschap bezitten.

Is nu V_1 een willekeurig punt in den omtrek van ε, en zijn V_1V_2 en V_1V_3 de beide in φ gelegen assen door V_1 — waarbij weer V_2 en V_3 de tweede snijpunten dier assen zijn met ε —, dan zijn V_1V_2 en V_1V_3 dus raaklijnen aan de parabool en is V_2V_3 dit ook en dus ook een as.

De normalen in V_1, V_2 en V_3 moeten elkaar dus 2 aan 2 snijden; daar ze niet in een zelfde vlak liggen, snijden ze elkaar in een zelfde punt. In den omtrek van ε liggen dus oneindig veel drietallen van punten, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen aan *E*.

Hieruit blijkt:

Bevat een vlakke doorsnede van een ellipsoïde E 3 punten, die voetpunten zijn van normalen aan E, die elkaar in een zelfde punt snijden, dan zal die vlakke doorsnee oneindig veel drietallen van punten bevatten, wier normalen elkaar in een zelfde punt snijden.

Dit zal steeds 't geval zijn, als de normalen in 't vlak van die doorsnede elkaar in een punt van ε snijden. [1])

[1]) Tot ditzelfde resultaat komt Desboves langs analytischen weg; Desboves: Théorie Nouvelle des normales aux surfaces du second ordre. Parijs, Mallet-Bachelier, 1862.

Wij kunnen deze voorwaarde ook op een andere wijs uitdrukken. De normalen in 't vlak φ hebben wij bepaald, door uit P — 't voetpunt van de loodlijn uit de pool Q van φ op φ neergelaten — raaklijnen aan ε te trekken; deze raakpunten zijn de voetpunten der normalen in φ gelegen. Wij vragen nu naar de ligging van 't punt P, opdat deze normalen elkaar in den omtrek van ε zullen snijden. In § 10 is aangetoond, dat daartoe noodig is, dat P ligt in den omtrek van een bepaalde ellips, die 't middelpunt en de richtingen der symmetrie-assen met ε gemeen heeft.

Wij vinden dus:

De voorwaarde, dat de doorsnede van E met een vlak φ oneindig veel drietallen van punten heeft, wier normalen aan E elkaar in één punt snijden, is: dat 't voetpunt der loodlijn, op φ uit zijn pool Q neergelaten, ligt in den omtrek van een bepaalde ellips, die 't zelfde middelpunt en dezelfde assenrichtingen heeft als de doorsnede. [1])

§ 14. Noemen wij nu ε een vlakke doorsnede van een ellipsoïde *E*, en onderstellen wij dat ε 3 punten bevat, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen, dan zal 't oppervlak, dat gevormd wordt door de normalen aan *E* in alle punten van ε, een dubbelkromme van den derden graad bezitten, die oneindig veel drievoudige punten heeft.

Die dubbelkromme zal dus ontaarden in een driemaal tellende rechte lijn. De meetkundige plaats der snijpunten van de normalen in de punten van ε is dus een rechte lijn.

§ 15. Trekken wij uit een willekeurig punt A de normalen aan een ellipsoïde *E*, dan zijn de voetpunten dier normalen de snijpunten van een kubische kromme met *E*; 't aantal dier normalen is dus 6.

Wij laten nu A een lijn *l* beschrijven en vragen naar de meetkundige plaats van de voetpunten der normalen, die

---

[1]) Desboves: Théorie Nouvelle.

wij uit de punten van l op E kunnen neerlaten. Laten wij nu het oppervlak E om de lijn l als as over een oneindig kleinen hoek draaien, dan zullen de beide standen van 't oppervlak een kromme van den vierden graad gemeen hebben; de normalen in de punten van deze kromme snijden l. De projectie van l op E is dus een kromme van den vierden graad.

Een punt projecteert zich dus op E in 6 punten, een lijn volgens een kromme van den vierden graad.

Is nu ε weer dezelfde ellips als in de vorige § en s de lijn, die gevormd wordt als de meetkundige plaats der snijpunten van de normalen in de punten van ε, dan is dus ε een gedeelte van de projectie van s op E. Daar ε een vlakke doorsnede is, en de projectie van s op E van den vierden graad moet zijn, moet deze projectie van s dus ontaard zijn in 2 vlakke krommen. Elk punt van s projecteert zich op E in 3 punten van ε; de 3 andere voetpunten zijn dus in den omtrek van de andere vlakke doorsnede gelegen.

Wordt de ellipsoïde E door een vlak φ gesneden volgens een ellips ε, en wordt een lijn s voortgebracht als meetkundige plaats der snijpunten van drietallen van normalen in de punten van ε, dan is er dus steeds op E een tweede vlakke doorsnede ε', die dezelfde lijn s op dezelfde wijze voortbrengt.

§ 16. Wij nemen nu op ε 3 punten V_1, V_2 en V_3 aan, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt P snijdende normalen; de voetpunten der andere normalen uit P aan E getrokken noemen wij V_4, V_5 en V_6. Wij willen nu, als de punten V_1, V_2 en V_3 gegeven zijn, 't vlak φ', dat V_4, V_5 en V_6 bevat, bepalen.

Daarvoor bewijzen wij 2 hulpstellingen:

I. »Hebben 3 oppervlakken van den tweeden graad een vlakke kromme gemeen, dan zullen de 3 vlakken, waarvan elk een vlakke kromme bevat, die 2 dezer oppervlakken

verder gemeen hebben, elkaar snijden volgens een rechte lijn.»

Om deze hulpstelling te bewijzen, noemen wij de 3 oppervlakken E_2, F_2 en G_2, en het vlak, waarin de gemeenschappelijke kegelsnee ligt, α; de vlakken, waarin de 3 andere vlakke krommen liggen, die ze 2 aan 2 gemeen hebben, noemen wij λ, μ en ν. Wij snijden nu de 3 oppervlakken door een vlak β (fig. 6); de oppervlakken worden gesneden volgens 3 kegelsneden, die 2 punten gemeen hebben op de lijn (α, β); de 3 lijnen, getrokken door de beide andere snijpunten dezer kegelsneden, 2 aan 2 genomen, zijn de lijnen (β, λ), (β, μ) en (β, ν). Deze 3 lijnen snijden elkaar nu in een zelfde punt (deze stelling wordt o. a. gebruikt als hulpstelling bij een bewijs der stelling van Pascal); hier blijkt dus, dat de snijlijnen der vlakken λ, μ en ν met een willekeurig vlak β elkaar in één punt snijden, waaruit volgt, dat die 3 vlakken een lijn gemeenschappelijk hebben. Hiermee is deze eerste hulpstelling bewezen.

II. »Hebben 2 oppervlakken van den tweeden graad E_2 en F_2 een vlakke kromme gemeen, en worden zij in 3 punten van die vlakke kromme gesneden door een ruimtekromme R_3 van den derden graad, dan zullen ook de volgende 3 vlakken een lijn gemeen hebben:

't vlak, dat de tweede vlakke kromme bevat, die aan E_2 en F_2 gemeenschappelijk is;

't vlak, dat de 3 andere snijpunten van E_2 en R_3 bevat;

't vlak, dat de 3 andere snijpunten van F_2 en R_3 bevat.»

Wij noemen ε de vlakke kromme, die E_2 en F_2 gemeen hebben; ε wordt nu in 3 harer punten gesneden door R_3. Bewijzen wij nu, dat door ε en R_3 een oppervlak van den tweeden graad gebracht kan worden, dan is hiermee onze

tweede hulpstelling bewezen; zij volgt dan nl. rechtstreeks uit de eerste.

Wij denken ons nu eerst een kegelsnede ε' en een ruimtekromme van den derden graad R'_3, die geen enkel punt gemeen hebben; de snijpunten van R'_3 met 't vlak, dat ε' bevat, noemen wij A′, B′ en C′. Door elk punt van ε' kunnen wij één koorde van R'_3 trekken; al deze lijnen vormen een regeloppervlak van den achtsten graad, daar 't vlak, dat ε' bevat, dit regeloppervlak snijdt volgens ε' en de dubbellijnen A′B′, B′C′ en C′A′. Keeren wij nu terug tot 't geval, dat de kegelsnee ε door R_3 gesneden wordt in 3 punten, die wij A, B en C noemen; wij beschouwen weer 't regeloppervlak, dat gevormd wordt door lijnen, die koorden van R_3 en snijlijnen van ε zijn. Dit regeloppervlak van den achtsten graad ontaardt in 3 kegels, die R_3 uit A, B en C projecteeren, en een regeloppervlak, dat dus van den tweeden graad moet zijn. Op dit kwadratisch oppervlak moeten ε en R_3 nu beide liggen. Denken wij ons dit oppervlak aangebracht, dan volgt de tweede hulpstelling onmiddellijk uit de vorige.

Wij keeren nu terug tot de vraag, die aan 't begin van deze § gesteld werd; daarbij zijn V_1, V_2 en V_3 voetpunten van normalen aan E, die elkaar in één punt P snijden en φ is 't vlak, dat V_1, V_2 en V_3 bevat. Zij nu σ een symmetrievlak b.v. 't vlak XOY, en AB (fig. 7) de lijn volgens welke σ door 't vlak φ (V_1, V_2, V_3) gesneden wordt, A en B het paar snijpunten van φ met de hoofdellips in 't vlak XOY, A′ 't punt, dat ten opzichte van O tegenover A ligt, en B_1 't punt, dat ten opzichte van de as OY symmetrisch met B gelegen is. Door de vlakke kromme van doorsnede ε van φ met de ellipsoïde E en de lijnen AA′ en BB_1 kunnen wij nu oneindig veel oppervlakken van den tweeden graad brengen; wij nemen uit dezen oppervlakkenbundel er één willekeurig aan en noemen het F_2.

De hulpstelling II passen wij nu toe op de oppervlakken E en F_2 en de kromme van Steiner van 't punt P,

welks ligging volstrekt willekeurig is, en waarbij de voetpunten V_1, V_2 en V_3 behooren; de kromme van Steiner van P noemen wij R_3.

De beide oppervlakken E en F_2 hebben de ellips ε gemeen en deze wordt in 3 harer punten door R_3 gesneden. 't Vlak, dat de tweede gemeenschappelijke vlakke doorsnede van E en F_2 bevat, gaat door de lijn $A'B_1$; 't vlak, dat de 3 andere snijpunten van R_3 en F_2 bevat, gaat door O en X_∞, dus door de as OX; 't snijpunt C van $A'B_1$ met de as OX, zal dus een punt zijn van 't vlak, dat de 3 verdere snijpunten van R_3 met E bevat. Op dezelfde wijze kunnen wij de snijpunten van 't gevraagde vlak met de assen OY en OZ aangeven; 't vlak door de 3 aldus bepaalde punten is 't gevraagde vlak φ'.

Noemen wij 't snijpunt van φ' met de Y-as D, dan is de pool van AB, t. o. v. de hoofdellips in 't vlak XOY, 't centrum van CD ten opzichte van de symmetrie-assen in dat vlak. Eveneens is in elk der andere symmetrie-vlakken de pool van de doorsnede van φ tegelijkertijd 't centrum van de doorsnede van φ'. Verstaan wij, in navolging van Laguerre, onder centrum van een vlak: »'t punt, waarvan de coördinaten de tegengestelden zijn van de stukken, door dat vlak van de symmetrie-assen afgesneden«, dan is dus de pool van φ 't centrum van φ'.

Dus: *trekken wij uit een willekeurig punt 6 normalen aan een ellipsoïde, en brengen wij 2 vlakken aan, die elk drie der voetpunten van deze normalen bevatten, dan is de pool van één dezer vlakken steeds 't centrum van 't andere vlak.*

Opmerking: Wij kunnen 't zelfde resultaat wel sneller bereiken; noemen wij n.l. s de lijn, die door de normalen in de punten van φ en φ' als dubbelkromme wordt voortgebracht, dan vinden wij 't snijpunt R van s met 't vlak XOY door in A en B de normalen te trekken. Trekken wij uit R de beide andere normalen aan de hoofdellips in 't vlak XOY, dan is de verbindingslijn dezer voetpunten de

doorsnee van 't gezochte vlak φ' met 't vlak XOY. De doorsneden van φ' met de andere symmetrie-vlakken zijn op dezelfde wijs te construeeren; ik heb echter den langeren weg genomen, omdat 't bovenstaande gemakkelijk is uit te breiden tot beantwoording der analoge vraag in een ruimte met n afmetingen.

§ 17. Een vlakke kromme op E bevat in 't algemeen geen enkel drietal van punten, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen. Wij willen nagaan de meetkundige plaats der vlakken, wier doorsneden met E de genoemde eigenschap *wel* bezitten.

Nemen wij daarvoor een willekeurige as, (in den zin, die Reye aan »as« geeft), die de ellipsoïde E snijdt in V_1 en V_2, en noemen wij R 't snijpunt der normalen in V_1 en V_2, dan zijn er nog 4 punten van E, wier normalen ook door R gaan. Die punten noemen wij V_3, V_4, V_5 en V_6. Door V_1V_2 gaan nu 4 vlakken, die tot de genoemde meetkundige plaats behooren, n.l. de vlakken $V_1\ V_2\ V_i$, waarin $i = 3$, 4, 5 of 6 is.

De gevraagde meetkundige plaats wordt dus gevormd door de raakvlakken van een oppervlak van de vierde klasse; dat oppervlak zullen wij in 't vervolg steeds Φ_4 noemen.

Door een willekeurige lijn gaan 4 raakvlakken van Φ_4; 't aantal dezer raakvlakken is dus ∞^2; Φ_4 is dus een niet ontwikkelbaar oppervlak. De polen der raakvlakken van Φ_4 vormen een oppervlak van den vierden graad; dit oppervlak is door Desboves genoemd: *Surface Normopolaire.* De lijn s, die gevormd wordt door de snijpunten der normalen in de punten van ε of ε', noemt hij een *synnormaal.*

Opmerking: Uit de in § 16 bewezen stelling volgt, dat 't normopolaire oppervlak ook de meetkundige plaats is der centra van de raakvlakken van Φ_4.

§ 18. Wij beschouwen nu een synnormaal s, die zich op E projecteert volgens de vlakke doorsneden ε en ε', respec-

tievelijk gelegen in de vlakken φ en φ'. De normalen in φ gelegen moeten elkaar nu snijden in een punt van den omtrek van ε (§ 14), en dat snijpunt moet een punt zijn van de synnormaal s; 't tweede snijpunt van s met E zal tegelijkertijd 't snijpunt der in φ' gelegen normalen zijn.

De snijpunten van een synnormaal met E liggen dus in de omtrekken der vlakke doorsneden, volgens welke deze synnormaal zich op E projecteert. [1])

§ 19. Wij gaan nu na, hoe de voetpunten der normalen zich langs ε en ε' verplaatsen, als 't punt, waaruit wij de normalen neerlaten, zich beweegt langs de synnormaal s. Daarvoor bewijzen wij de stelling: *de projecties van de synnormaal s op de vlakken φ en φ' zijn normalen aan de ellipsen ε en ε'.* [2])

Zij (in fig. 8) A 't snijpunt van s met ε en s_p de projectie van s op φ. De normaal aan E in een willekeurig punt D van ε snijdt s in R; noemen wij R_p de projectie van R op φ, dan is DR_p de normaal in D aan ε.

Is omgekeerd gegeven, dat DR_p de normaal in D aan ε is, dan kunnen wij de normaal in D aan E bepalen, door in R_p een loodlijn op φ op te richten, die s snijdt in R, en R met D te verbinden. Noemen wij nu B 't tweede snijpunt van s_p met ε en stellen wij, dat s_p niet normaal is aan ε, (noch in A noch in B), dan zouden wij uit een willekeurig punt van s_p 4 normalen aan ε kunnen trekken, wat wijst op 4 punten van ε, wier normalen elkaar in een zelfde punt van s zouden snijden. Ook de onderstelling, dat s_p normaal in A aan ε zou zijn, leidt tot een onmogelijkheid; wij zouden dan uit A behalve s_p nog 3 normalen aan ε kunnen trekken; in A zouden elkaar dan 4 norma-

[1]) Desboves: Théorie Nouvelle.
[2]) Desboves: Théorie Nouvelle.

len aan E snijden, wier voetpunten in den omtrek van ε liggen. Is daarentegen s_p normaal aan ε in B, dan zijn uit elk punt van s slechts 3 normalen op E neer te laten, wier voetpunten zich in den omtrek van ε bevinden. Deze laatste onderstelling alleen leidt tot de vroeger bewezen resultaten; s_p is dus normaal aan ε in B. Dit volgt trouwens ook reeds hieruit, dat de normaal in B aan E s snijden moet; de projectie van dit snijpunt op φ is het kromtemiddelpunt van het punt B in φ.

Eveneens zal de projectie van s op φ' normaal zijn aan ε'. De lijn s_p, die normaal is aan ε, is dus een raaklijn aan de ontwondene van ε; daar deze ontwondene van den zesden graad is, snijdt s_p haar nog in 4 punten. 't Raakpunt van s_p aan deze ontwondene is de projectie van 't snijpunt van s met de normaal in A, terwijl de snijpunten van s_p met de ontwondene de dubbelpunten van de involutie der puntendrietallen op ε geven.

§ 20. Noemen wij E 't punt, dat in de ellips ε diametraal tegenover B ligt, dan is de normaal in E aan ε evenwijdig aan s_p; dus is de normaal in E aan E evenwijdig aan s.

't Vlak φ' bevat eveneens een punt E', waarvan de normaal evenwijdig is aan s; deze beide punten E en E' zijn dus de uiteinden van een middellijn van E.

Laten wij uit een willekeurig punt R van s de 6 normalen op E neer, en brengen wij door de 3 voetpunten, die in ε liggen een cirkel, dan volgt uit de stelling van Joachimsthal, dat E 't vierde snijpunt is van dien cirkel met ε. Een cirkel, gebracht door de 3 andere voetpunten, zal E' tot vierde snijpunt met ε' hebben. Hierbij zijn de punten E en E' onafhankelijk van de plaats van R op s.

Hiermee zijn dus bewezen de volgende stellingen:

I. *Brengt men door 3 der voetpunten van de 6 normalen, uit een willekeurig punt R aan een ellipsoïde E getrokken, een cirkel, en door de 3 andere voetpunten een tweeden cirkel,*

dan liggen de beide vierde snijpunten van de 2 cirkels met E diametraal tegenover elkaar.

II. *Die vierde snijpunten veranderen niet als R zich verplaatst langs de synnomaal van de vlakken, waarin de cirkels liggen.*

III. *Die vierde snijpunten zijn de punten, waarin de normaal aan E evenwijdig is aan de genoemde synnormaal.*

De punten E en E′ heb ik verder de *cirkelpunten* der vlakken φ en φ' genoemd; (bij deze benaming »cirkelpunten« mag natuurlijk niet gedacht worden aan de cyclische punten, gemeen aan alle cirkels van het vlak).

§ 21. De stellingen, in § 20 afgeleid, stellen ons nog niet in staat, om bij 3 gegeven punten van *E*, wier normalen door een zelfde punt R gaan, de 3 andere punten van *E* te vinden, wier normalen eveneens door R gaan; deze 3 punten te vinden is nu ons doel. Daarvoor brengen wij door de 3 gegeven punten V_1, V_2 en V_3 een vlak, dat wij wederom φ noemen; de doorsnede van φ met *E* zij weer de ellips ε, in wier omtrek V_1, V_2 en V_3 nu liggen. De 3 gevraagde voetpunten liggen in het vlak φ', waarvan de pool 't centrum is van 't vlak φ; 't vlak φ' kunnen wij dus aangeven. Op ε bestaat nu een involutie van den derden graad, zoodat de normalen, in elk drietal van punten aan *E* opgericht, elkaar in een zelfde punt snijden; 't zelfde is 't geval met de involutie op ε'. Verder weten wij nog, dat bij elk drietal van toegevoegde punten op ε een drietal van toegevoegde punten op ε' behoort, zoodat de normalen in deze 2 drietallen elkaar in een zelfde punt snijden; de beide involuties zijn dus onderling projectief en zelfs gedeeltelijk perspectief, daar de 2 snijpunten van ε en ε' met zich zelf overeenstemmen. Wij hebben ons dus de vraag gesteld, bij een willekeurig drietal op ε 't overeenkomstige drietal op ε' te bepalen.

Daarvoor bewijzen wij de volgende stelling:

IV. *Alle cirkels in φ en φ', door de drietallen van toegevoegde punten der involuties op ε en ε' aangebracht, vormen*

2 bundels; hunne middelpunten liggen op 2 lijnen, die wij gemakkelijk kunnen aangeven. Op deze lijnen vormen de middelpunten projectieve puntreeksen, die gelijkvormig zijn en waarvan wij onmiddellijk 2 paren van overeenkomstige punten kunnen aangeven.

Beschouwen wij — om deze stelling te bewijzen — de involutie op ε; zij s de synnormaal, waarvan ε en ε' te samen de projectie op E vormen, en s_p de projectie van s op φ. De involutie op ε wordt nu ook voortgebracht door uit alle punten van s_p de 3 andere normalen aan ε te trekken (§ 19); hieruit volgt dat alle cirkels, die gebracht kunnen worden door de toegevoegde punten dezer involutie, een bundel vormen (§ 4).

Wij hebben reeds gezien, dat E — 't cirkelpunt van φ — één der basispunten van dezen bundel is; 't andere punt, dat wij F noemen, is 't voetpunt der loodlijn uit M — 't middelpunt van ε — op de raaklijn in E aan ε neergelaten (§ 7, fig. 3). De meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels uit dezen bundel is de lijn l, die EF loodrecht middendoor deelt. Eveneens vormen de cirkels, in φ' door de drietallen van toegevoegde punten der involutie op ε' gebracht, een bundel; de basispunten E′ en F′ van dien bundel en de lijn l', die de middelpunten der cirkels uit dezen bundel bevat, zijn op dezelfde wijze te bepalen als hierboven E, F en l in 't vlak φ. De lijnen l en l' zijn nu dragers van projectieve puntreeksen, gevormd door puntenparen, die middelpunten zijn van cirkels, die ε en ε' snijden in punten, wier normalen alle 6 door een zelfde punt gaan. Verder is dadelijk in te zien, dat beide middelpunten tegelijkertijd in 't oneindige liggen; de puntreeksen zijn dus gelijkvormig, en wij behoeven nog slechts 2 paren van overeenkomstige punten dezer puntreeksen aan te geven om de projectiviteit volledig te kunnen vaststellen.

De ellipsen ε en ε' hebben 2 snijpunten I en J; wij bepalen uit den bundel in φ den cirkel, die door I gaat, en

eveneens uit den bundel in φ'; dan zijn de middelpunten van deze beide cirkels een paar toegevoegde punten der puntreeksen op l en l'. 't Punt J geeft ons ook een paar overeenkomstige punten; hiermee is de projectiviteit vastgesteld en stelling IV bewezen.

Opmerking: De punten, die wij F en F' genoemd hebben, zijn de brandpunten der assenparabolen in φ en φ' (§ 7).

§ 22. Wij hebben gezien, dat de vlakken, wier doorsneden met de ellipsoïde E oneindig veel drietallen van punten bevatten, waarvan de normalen aan E opgericht elkaar in een zelfde punt snijden, raakvlakken zijn van een niet ontwikkelbaar oppervlak van de vierde klasse (§ 17). Dit oppervlak hebben wij Φ_4 genoemd; verder zagen wij, dat elk raakvlak aan Φ_4 een cirkelpunt heeft. Wij kunnen nu vragen: ten eerste of de punten E en E', die de cirkelpunten zijn van een vlakkenpaar φ en φ', ook nog de cirkelpunten zijn van een ander vlakkenpaar, en ten tweede of elk punt van E-cirkelpunt is van één of meer vlakken.

Noemen wij 't diametraal tegenover φ gelegen vlak φ_1, en dat tegenover φ' gelegen φ_1', dan is 't duidelijk, dat de beide vlakken φ_1 en φ'_1 raakvlakken zijn aan 't oppervlak Φ_4. 't Cirkelpunt van φ_1 moet nu 't tegenover E gelegen punt dus E' zijn, terwijl 't cirkelpunt van φ_1' E is. Deze 2 vlakken vormen dus 't tweede vlakkenpaar, dat E en E' tot cirkelpunten heeft. De bij deze vlakken behoorende synnormaal s_1 is diametraal tegenover s gelegen.

Onderstellen wij nu, dat E en E' van nog een vlakkenpaar de cirkelpunten zijn, dan moet de synnormaal van die beide vlakken evenwijdig zijn aan de normaal in E, dus ook evenwijdig zijn aan s, m. a. w. s in 't oneindig snijden. Uit S_∞ — 't oneindig ver gelegen punt van s — kunnen wij 6 normalen aan E trekken: de voetpunten zijn behalve E en E' nog 4 onbestaanbare punten N_1, N_2, N_3 en N in het oneindige. Hiervan liggen er 2 b.v. N_1 en N_2 in φ en zijn toegevoegd onbestaanbaar, de beide anderen

N_3 en N_4 liggen in φ' en zijn eveneens toegevoegd onbestaanbaar. Er zijn dus slechts 2 bestaanbare vlakkenparen, waarvan E en de E′ cirkelpunten zijn, n.l.:

$$N_1 N_2 E, \quad N_3 N_4 E'$$
$$\text{en} \quad N_3 N_4 E, \quad N_1 N_2 E'.$$

Een derde bestaanbaar vlakkenpaar met E en E′ als cirkelpunten is er dus niet.

Ook volgt hieruit, dat 2 tegenover elkaar gelegen punten van E steeds de cirkelpunten zijn van 6 vlakkenparen, waarvan slechts 2 paar bestaanbaar zijn. Noemen wij de beide punten G en G′ en 't oneindig ver gelegen punt hunner normalen R_∞, dan zijn uit R_∞ nog 4 andere normalen aan E te trekken, wier voetpunten 2 aan 2 toegevoegd onbestaanbaar zijn. Door deze 4 onbestaanbare punten en G en G′ zijn 2 bestaanbare en 4 onbestaanbare vlakkenparen bepaald; van elk dezer paren zijn G en G′ de cirkelpunten.

HOOFDSTUK III.

DE HYPERBOLOÏDE H_2 EN DE KEGEL K_2.

§ 23. Alle normalen, in de punten van de doorsneden ε en ε' van E met φ en φ' aan E opgericht, snijden de lijn s. Brengen wij door s een vlak γ, dan snijdt dat vlak de ellipsen ε en ε' elk nog in één punt: wij noemen die punten G en G' (fig. 9). De normalen in G en G' aan E snijden beide s, dus moeten ze beiden in 't vlak γ liggen. Hieruit volgt weer, dat de normalen in G en G' elkaar snijden, dus dat de lijn GG' zelf een as is. Noemen wij P 't snijpunt van GG' en s, dan is GG' één der beschrijvende lijnen van den assenkegel — kegel van Chasles — van 't punt P. Draaien wij nu 't vlak γ om s, dan doorloopen de punten G en G' de ellipsen ε en ε'. Om nu na te gaan 't oppervlak door GG' beschreven, onderscheiden wij 2 gevallen, n.l. s is een as, of s is dit niet.

Opmerking: Hier rijst de vraag, of de synnormaal s een as *kan* zijn! De assen vormen een kwadratisch complex, de synnormalen een congruentie, waarvan de graad en de klasse later aangegeven zullen worden; hieruit volgt, dat 't aantal lijnen, die zoowel as als synnormaal zijn, oneindig groot is; m. a. w. de lijnen, die aan 't assencomplex en de congruentie der synnormalen gemeenschappelijk zijn, vormen een regel-oppervlak.

§ 24. Wij onderstellen eerst, dat s een as is.

Twee assen snijden elkaar, wanneer de verbindingslijn hunner polen een as is.

Zal een as s door een normaal gesneden worden, dan moet de lijn, die de pool van s verbindt met 't voetpunt van die normaal, dus ook een as zijn. Alle punten van E, wier normalen de as s snijden, moeten dus de doorsnee vormen van E met den kegel van Chasles van de pool van s. De ellipsen ε en ε' vormen dus de doorsnede van E met dien kegel.

Wanneer wij, zooals in de vorige §, 't vlak γ om s wentelen, en de punten G en G' de ellipsen ε en ε' doen doorloopen, zal daarbij 't snijpunt van GG' en s vast zijn en de lijn GG' een kegel beschrijven. De top van dien kegel is de pool van s. Derhalve:

Is een synnormaal s een as, dan ligt s met de beide ellipsen, waarbij s als synnormaal behoort, op een kegel van den tweeden graad. Deze kegel is de kegel van Chasles van de pool van s. De doorsnede van de ellipsoïde E met den kegel van Chasles van een punt P zal zich dan alleen in 2 vlakke krommen splitsen, als dat punt de pool is van een as, die tevens een synnormaal is.

§ 25. Wij onderstellen nu, dat de synnormaal s geen as is. Draaien wij nu 't vlak γ weer om s, dan doorloopen de punten G en G' de ellipsen ε en ε' en 't punt P doorloopt de lijn s.

Nemen wij omgekeerd op s een willekeurig punt P, dan kunnen wij door P slechts één lijn trekken, die op de ellipsen ε en ε' rust. Projecteeren wij n.l. de ellipsen ε en ε' uit P, dan verkrijgen wij 2 kegels met denzelfden top, die vier beschrijvende lijnen gemeen hebben. Onder die vier lijnen is begrepen s en verder het tweetal lijnen, die P verbinden met de beide snijpunten van ε en ε'. De gevraagde lijn is dus ondubbelzinnig bepaald.

Hieruit volgt dus:

1°. Bepalen wij van een punt P van s den kegel van Chasles, dan zal die kegel elk der ellipsen ε en ε' snijden in 3 van de voetpunten der normalen, die door P gaan en verder elk nog in één punt, welke beide punten op eenzelfde beschrijvende lijn van den kegel liggen.

2°. Laten wij 't vlak γ om s draaien, dan beschrijft de lijn GG' een regeloppervlak H_2 van den tweeden graad, daar er door elk punt van s slechts één beschrijvende lijn gaat.

De ellipsen ε en ε' liggen dus met de bijbehoorende synnormaal s op een regelschaar H_2, waarvan alle beschrijvende lijnen assen zijn.

§ 26. Wij hebben de beschrijvende lijnen van H_2 voortgebracht door een vlak γ te laten wentelen om s en de tweede snijpunten van dat vlak met ε en ε' met elkaar te verbinden. Die beide tweede snijpunten zullen nu 2 maal samenvallen, n.l. in de beide snijpunten der ellipsen ε en ε'; onder de beschrijvende lijnen van H_2 komen dus 2 raaklijnen aan de ellipsoïde E voor.

Brengen wij 't vlak γ aan door s en O — 't middelpunt der ellipsoïde E —, dan zullen de voetpunten der in dit vlak gelegen normalen zich bevinden in de uiteinden eener middellijn. Die middellijn is dus een beschrijvende lijn van H_2 en O ligt dus op H_2.

Door 't vlak γ aan te brengen door s loodrecht op de symmetrie-vlakken van E blijkt, dat ook de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen op H_2 liggen.

De regelschaar H_2 bevat onder hare beschrijvende lijnen dus 2 raaklijnen aan E en gaat door 't middelpunt van E en de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen.

§ 27. Zij weer P een willekeurig punt van s en beschouwen wij de kubische ruimtekromme, die de polen bevat van alle door P gaande assen, m. a. w. de kromme van Steiner van 't punt P, dan kunnen wij al 11 punten aanwijzen,

waarin de kromme van Steiner van 't punt P de regelschaar H_2 snijdt, n.l. 't middelpunt O der ellipsoïde, de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen, de 6 voetpunten der normalen uit P op E neergelaten en P zelf.

De regelschaar H_2 is dus de meetkundige plaats der krommen van Steiner van de punten der synnormaal s.

§ 28. Nemen wij een beschrijvende lijn g_1 van H_2, dan heeft die lijn in 't vlak, door g_1 en s gebracht, een eigenaardige beteekenis. In dat vlak verbindt g_1 de voetpunten der beide in dat vlak liggende normalen; g_1 is dus de meetkundige plaats der polen van de assen, in dat vlak gelegen.

Wij kunnen H_2 dus ook beschouwen als de meetkundige plaats van de lijnen, die de polen bevatten van alle s snijdende assen (zie Reye: vierde druk, deel II, vraagstukken 187 en 188).

§ 29. Beschouwen wij de kromme van Steiner van een willekeurig punt P van de synnormaal s, dan zal s die kromme alleen in P snijden, daar elke koorde van die kromme een as moet zijn, en s geen as is.

Brengen wij nu een vlak door s en g_1 — een willekeurige beschrijvende lijn van H_2 —, dan zal dat vlak die kromme in nog 2 andere punten snijden, die dus beide op g_1 liggen.

Elke beschrijvende lijn van H_2 is dus een koorde van elk der krommen van Steiner, die H_2 vormen. 't Tweede stel rechte lijnen van H_2 — de richtlijnen — zijn dus snijlijnen van al die krommen.

Tot de richtlijnen van H_2 behoort o. a. de synnormaal s; wij willen aantoonen, dat ook de middellijn der ellipsoïde E, die de cirkelpunten E en E′ der vlakken φ en φ' verbindt, een richtlijn is. 't Is duidelijk, dat deze middellijn geheel op H_2 ligt, want van 3 harer punten, n.l. E, O en E′, weten wij reeds, dat zij op H_2 liggen. Om nog te bewijzen, dat de lijn EOE′ een richtlijn is, brengen wij een vlak μ door EOE′ en de normalen in E en E′, aan de ellipsoïde opge-

richt; deze normalen zijn evenwijdig aan s, waaruit volgt, dat s evenwijdig aan μ is of geheel in μ ligt. 't Laatste kan echter alleen 't geval zijn, als s een as is; want in 't middelvlak μ behoort elke lijn, die evenwijdig aan de normalen in E en E' is, tot 't assencomplex (§ 12). Daar s geen as is, zal s dus evenwijdig aan μ zijn en EOE' niet snijden. Beide lijnen s en EOE' liggen echter op H_2; daar s een richtlijn is, moet EOE' dus ook een richtlijn van H_2 zijn.

Opmerking: Hierbij blijkt, dat s en de middellijn EOE' elkaar alleen dan *kunnen* snijden, wanneer s een as is; later wordt bewezen, dat zij elkaar in dat geval *moeten* snijden.

§ 30. Alle beschrijvende lijnen van H_2 zijn assen; wij kunnen dus de meetkundige plaats der polen van die assen zoeken. Daarvoor gaan wij nog eens de voortbrenging van H_2 na. Wij lieten een vlak γ om s wentelen; is nu g_1 de lijn, die de voetpunten der in dat vlak liggende normalen verbindt, dan brengt bij die wenteling g_1 de regelschaar H_2 voort.

Wij noemen nu G de pool van 't vlak γ en g de loodlijn uit G op γ neergelaten; dan is g een as, G is de pool van die as en g en g_1 zijn toegevoegde poollijnen; verder noemen wij s_1 de toegevoegde poollijn van s. Bij de wenteling van γ om s zal dan G de lijn s_1 doorloopen; nu zijn de lijnen g en g_1 toegevoegde poollijnen, en wij passen hier dus de stelling toe: »doorloopt de pool van een as een rechte lijn, dan doorloopt de pool van de toegevoegde as een kubische ruimtekromme« (Reye, vierde druk, deel II, vraagstuk 202). De meetkundige plaats der polen van de beschrijvende lijnen van H_2 is dus een kubische ruimtekromme; 't middelpunt van E en de in 't oneindige gelegen punten der hoofdassen zijn punten dier ruimtekromme.

Daar 2 beschrijvende lijnen van H_2 elkaar nooit snijden, ligt op elke beschrijvende lijn slechts één punt van deze

kromme, nl. haar eigen pool; elke richtlijn van H_2 is daarentegen een koorde van deze kromme.

Dit geeft tevens antwoord op de vraag, of er onder de beschrijvende lijnen van H_2 ook normalen aan E voorkomen. De kubische ruimtekromme, die de meetkundige plaats is der polen van de beschrijvende lijnen van H_2, snijdt de vlakken φ en φ' elk in 3 punten, die respectievelijk in den omtrek der ellipsen ε en ε' liggen. De assen, waarvan deze snijpunten de polen zijn, zijn normalen aan E; onder de beschrijvende lijnen van H_2 komen dus 6 normalen voor.

§ 31. Beschouwen wij ten slotte 't geval, dat de synnormaal s, behoorende bij de vlakken φ en φ', een as is. Wij kunnen nu op een paar stellingen wijzen, die zich alleen in dit bijzondere geval voordoen.

1°. Wij hebben gezien, dat nu de synnormaal s met de ellipsen ε en ε' op een kegel ligt, waarvan de top de pool van s is. Op dien kegel — dien wij K_2 noemen — liggen in een rechte lijn 't middelpunt van E en de beide cirkelpunten van φ en φ'; die lijn is dus een beschrijvende lijn van den kegel.

Is de synnormaal s een as, dan bevat de middellijn door haar pool dus de cirkelpunten der vlakken φ en φ'.

2°. Is de synnormaal s een as, dan hebben de ellipsen ε en ε' slechts één paar diametraal overgelegen punten, nl. E en E' — de cirkelpunten der vlakken φ en φ' —; want stellen wij ons voor, dat in den omtrek van ε nog een punt D voorkomt, dat diametraal tegenover een punt D' in den omtrek van ε' ligt, dan zou de lijn DD' met den kegel K_2 3 punten gemeen hebben, dus geheel op dien kegel liggen; de eenige middellijn van E, die op dien kegel ligt, is echter EE'.

Brengen wij nu een vlak φ'_1 aan, dat diametraal tegenover φ' ligt, dan zal dat vlak dus φ snijden volgens een lijn,

die met de ellips ε alleen 't punt E gemeen heeft; die lijn is dus de raaklijn in E aan ε.

De snijlijn der vlakken φ en φ' is dus evenwijdig aan de raaklijn in E aan ε.

Nu staat de projectie van de synnormaal s op 't vlak φ loodrecht op die raaklijn (zie fig. 8), dus s zelf kruist die raaklijn en dus ook de snijlijn (φ, φ') loodrecht.

Is de synnormaal s een as, dan kruist die synnormaal dus de snijlijn der vlakken, waarbij zij behoort, loodrecht.

3e. Is de synnormaal s een as, dan kunnen wij den kegel K_1 door s en de beide ellipsen ε en ε' brengen. Nu kunnen wij door 2 ellipsen, die in verschillende vlakken liggen en 2 punten gemeen hebben, oneindig veel oppervlakken van den tweeden graad brengen, waaronder 2 kegels.

De snijlijn (φ, φ) heeft ten opzichte van al die oppervlakken dezelfde toegevoegde poollijn; op die lijn liggen ook de toppen van beide kegels. De top van K_1 ligt dus op de lijn, die aan (φ, φ') polair is toegevoegd.

Is dus de synnormaal s een as, dan ligt de pool van die as op één lijn met de polen der vlakken φ en φ'.

§ 32. Behalve de hoofdassen der ellipsoïde zijn er nog 4 middellijnen, die synnormalen zijn. Laten wij uit O — 't middelpunt der ellipsoïde E — de normalen op E neer, dan kunnen wij de 6 voetpunten dier normalen op 4 verschillende manieren verdeelen over 2 vlakken, die elk 3 der voetpunten bevatten. De vlakken van elk vlakkenpaar zijn evenwijdig aan elkaar; de synnormalen, die bij deze vlakkenparen behooren, zijn middellijnen; de kegels, die deze synnormalen op E projecteeren hebben O tot top, daar O de pool is van elke middellijn.

HOOFDSTUK IV.

VERSCHILLENDE EIGENSCHAPPEN DER SYNNORMALEN EN DER RAAKVLAKKEN VAN 'T OPPERVLAK Φ_4.

§ 33. Uit een willekeurig punt P kan men op een ellipsoïde E 6 normalen neerlaten. Die 6 voetpunten kunnen op 10 verschillende manieren over 2 vlakken verdeeld worden; 't aantal der synnormalen, die door P gaan, is dus 10.

Zij s een willekeurige synnormaal, die zich op E projecteert volgens de ellipsen ε en ε', dan ligt één der snijpunten van s met E in den omtrek van ε, 't andere in den omtrek van ε'. Brengen wij door s een willekeurig vlak γ, dan zal dit vlak met ε en ε' elk nog één punt gemeen hebben; in 't vlak γ liggen 2 normalen aan E, waarvan dus de één haar voetpunt op ε en de andere haar voetpunt op ε' moet hebben. Van deze opmerking maken wij gebruik om 't aantal der synnormalen, die in een willekeurig vlak liggen, te bepalen.

Wij verstaan nu onder α een willekeurig vlak, n_1 en n_2 zijn de in α gelegen normalen, N_1 en N_2 zijn de voetpunten dezer normalen en P is hun snijpunt. Elke synnormaal in α snijdt n_1 en n_2; wij hebben aangetoond, dat N_1 en N_2 niet in dezelfde der beide „halve projecties" van één dezer synnormalen kunnen liggen. Een synnormaal in α projecteert zich dus op E volgens 2 ellipsen, waarvan de eene N_1, de andere N_2 bevat. Er zijn echter nog andere

synnormalen aan te wijzen, die dezelfde eigenschap bezitten, n.l. 6 door P gaande synnormalen. Om dit aan te toonen, merken wij op, dat uit P, behalve n_1 en n_2, nog 4 andere normalen op E neergelaten kunnen worden; de voetpunten dezer normalen noemen wij N_3, N_4, N_5 en N_6. De 6 bedoelde synnormalen, van wier beide halve projecties de eene N_1 en de andere N_2 bevat, zijn nu de synnormalen, die behooren bij de volgende vlakkenparen:

$$
\begin{array}{rcl}
N_1N_3N_4 & , & N_2N_5N_6\,; \\
N_1N_3N_5 & , & N_2N_4N_6\,; \\
N_1N_3N_6 & , & N_2N_4N_5\,; \\
N_1N_4N_5 & , & N_2N_3N_6\,; \\
N_1N_4N_6 & , & N_2N_3N_5 \\
\text{en } N_1N_4N_6 & , & N_2N_3N_4.
\end{array}
$$

't Aantal der in α gelegen synnormalen bepalen wij nu aldus:

Wij bepalen eerst 't aantal der synnormalen, van wier halve projecties de eene N_1 en de andere N_2 in haar omtrek bevat; dit aantal verminderen wij met 6, waarna wij 't aantal der in α gelegen synnormalen overhouden.

Wij gaan nu uit van de beide volgende stellingen:

I. „Zijn φ en φ' 2 vlakken, wier doorsneden met E te zamen de projectie van een lijn s vormen, dan zal steeds de pool van één dezer vlakken 't centrum zijn van 't andere" (§ 16);

II. „De vlakken, wier doorsneden met E halve projecties zijn van synnormalen, omhullen een oppervlak Φ_4 van de vierde klasse; hunne polen liggen op een oppervlak van den vierden graad, door Desboves 't normopolaire oppervlak genoemd" (§ 17).

Denken wij ons nu alle vlakken door N_1 aangebracht, dan vormen de centra van al deze vlakken een oppervlak van den derden graad (van deze eigenschap geef ik later 't bewijs, § 39*a*), terwijl de polen van alle vlakken door N_2 gebracht een vlak v_2 vormen. Dit oppervlak van den

derden graad wordt door υ_2 gesneden volgens een kubische kromme; een willekeurig punt van deze kromme heeft dus de eigenschap, dat het 't centrum van een vlak door N_1 en de pool van een vlak door N_2 is. Deze kromme heeft met 't normopolaire oppervlak 12 snijpunten; er zijn dus 12 vlakkenparen aan te wijzen, wier doorsneden met E te zamen de projectie van een synnormaal vormen, waarbij één der vlakken N_1 en het andere N_2 bevat. 't Aantal der in α gelegen synnormalen is dus $12 - 6 = 6$.

De synnormalen vormen dus een congruentie van den tienden graad en van de zesde klasse, m. a. w. een congruentie (10, 6).

§ 33*a*. Aan 't voorgaande wensch ik nog een paar opmerkingen vast te knoopen.

I. Wij vonden, dat de synnormalen een congruentie van de zesde klasse vormen; de symmetrie-vlakken van E en 't in 't oneindig gelegen vlak V_∞ schijnen echter oneindig veel synnormalen te bevatten, daar een willekeurige lijn in één dezer vlakken zich op E projecteert volgens 2 vlakke krommen. Nemen wij op die lijn een punt, dan liggen echter van de 6 projecties van dat punt op E er 4 op één dezer beide vlakke krommen en 2 op de andere. Synnormaal in de beteekenis, die wij er aan hechten, is deze lijn dus niet; wèl zijn synnormalen de symmetrie-assen van E en de snijlijnen der symmetrie-vlakken met V_∞. Elk der genoemde vlakken bevat dus 3 synnormalen; deze moeten echter dubbel geteld worden.

Noemen wij P een punt op een der symmetrie-assen, b.v. op de X-as, x_1 en x_2 de toppen dezer as, x_3 en x_4 de beide andere in 't vlak XOY gelegen voetpunten der normalen uit P op E neergelaten, x_5 en x_6 de beide in 't vlak XOZ gelegen voetpunten der normalen uit P, dan behoort de X-as als synnormaal bij de vlakkenparen:

$$x_1 x_3 x_4 \quad , \quad x_2 x_5 x_6$$

en

$$x_2 x_3 x_4 \quad , \quad x_1 x_5 x_6 .$$

In elk symmetrie-vlak en in V_∞ liggen dus 3 synnormalen, die dubbel geteld moeten worden.

Ook dit wijst er op, dat de synnormalen een congruentie van de zesde klasse vormen. [1])

II. Wij hebben gezien, dat een synnormaal deel kan uitmaken van 't assencomplex (§ 23).

Daar de assen een quadratisch complex en de synnormalen een congruentie van den tienden graad en van de zesde klasse vormen, wordt door de synnormalen, die tegelijkertijd assen zijn, een regeloppervlak gevormd, waarvan de graad $10 \times 2 + 6 \times 2 = 32$ is.

III. Behalve deze congruentie van synnormalen, is er nog een congruentie van lijnen, wier projectie op de ellipsoïde E ontaardt; deze congruentie — die ik overigens in 't geheel niet bespreek, maar waarop ik later zal moeten terugwijzen — bestaat uit lijnen, wier projectie op E zich splitst in een kubische ruimtekromme en een rechte lijn.

§ 34. Wij noemen s een willekeurige synnormaal, φ en φ' de bij die synnormaal behoorende vlakken en ε en ε' de doorsneden van φ en φ' met de ellipsoïde E. De synnormaal s snijdt de ellipsen ε en ε' in de punten A en A'; een willekeurig vlak γ door s zal ε en ε' in nog 2 punten G en G' snijden; de normalen in G en G' liggen nu in 't vlak γ. Snijdt nu de lijn (φ, φ') de ellipsoïde in de punten I en J, en brengen wij een vlak door s en één dier punten, b.v. I, dan zijn de beide normalen, die in dit vlak liggen, samengevallen in den normaal van I. Dit vlak, waarin 2 opeenvolgende normalen elkaar snijden, is dus één der hoofdkromtevlakken van I en raakvlak aan 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten van E; 't raakpunt is 't snijpunt der beide op elkaar volgende normalen, m. a. w. 't snijpunt van de normaal in I met s.

---

[1]) Dr. P. H. Schoute, Over 't projecteeren op oppervlakken. (Nieuw Archief voor Wiskunde, deel VI, 1880.)

De lijn s, die in dit raakvlak ligt en door 't raakpunt gaat, is dus een raaklijn aan 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten; eveneens zal s dat oppervlak in één der hoofdkromtemiddelpunten van J aanraken, dus s is een dubbelraaklijn aan dat oppervlak.

Elke synnormaal is dus een dubbelraaklijn aan 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten [1]).

Hieruit volgt een eenvoudig bewijs, dat 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten van den twaalfden graad is.

Is s_p de projectie van s op 't vlak φ, dan is s_p normaal aan ε, dus is s_p een raaklijn aan de ontwondene van ε. Elk snijpunt van s_p met die ontwondene wijst op een snijpunt van s met 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten. Onder de punten van ε zijn er dus 4, van welke één der hoofdkromtemiddelpunten op s ligt; eveneens zijn er onder de punten van ε' 4, die deze eigenschap hebben. De lijn s zal dus dat oppervlak in 8 punten snijden en in 2 punten raken; andere snij- of raakpunten zijn er niet, daar s geen enkele normaal snijdt, wier voetpunt niet in den omtrek van ε of ε' ligt.

't Oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten is dus van den twaalfden graad.

§ 35. Uit een willekeurig punt P kunnen wij 6 normalen op de ellipsoïde E neerlaten. Dragen wij zorg, dat P niet ligt op 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten of in een der symmetrie-vlakken of in 't vlak in 't oneindige, dan zijn de voetpunten der normalen 6 verschillende punten, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 en V_6, die wij op 10 verschillende manieren over 2 vlakken kunnen verdeelen. Wij willen nu bewijzen, dat een vlak door P hoogstens 2 van de 10 synnormalen, die door P gaan, bevatten kan.

Wij brengen daarvoor een vlak door V_1, V_2 en V_3 en

[1]) Laguerre: Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1874, of Œuvres complètes II, pag. 368,

een tweede vlak door V_4, V_5 en V_6; de bij deze vlakken behoorende synnormaal noemen wij s_1; hierna brengen wij een ander vlakkenpaar aan, waarvan 't eerste vlak de punten V_1, V_2 en V_6 bevat en 't tweede de punten V_3, V_4 en V_5; de bij dit vlakkenpaar behoorende synnormaal noemen wij s_2.

De beide vlakkenparen zullen nu nog 2 punten van de ellipsoïde E gemeen hebben. De normalen in die punten, die wij G en H noemen, moeten nu zoowel s_1 als s_2 snijden en dus met s_1 en s_2 in eenzelfde vlak liggen (fig. 10).

Denken wij ons door de 6 punten nog een derde vlakkenpaar gebracht — de hierbij behoorende synnormaal noemen wij s_3 —, dan zal dit derde vlakkenpaar met het eerste nog een paar punten van E gemeen hebben, die wij K en L noemen.

De normalen in K en L liggen dan in 't vlak door s_1 en s_3.

Lagen nu de synnormalen s_1, s_2 en s_3 in één vlak, dan zouden ook de normalen in de 4 punten G, H, K en L in dat vlak liggen. Dit is onmogelijk, tenzij dat vlak een symmetrie-vlak van E is. Wij hebben echter gezien, dat de 3 synnormalen, die een symmetrie-vlak bevat, niet door één punt gaan; de 3 synnormalen s_1, s_2 en s_3 kunnen dus niet in een zelfde vlak liggen.

Door een punt P — mits niet gelegen op 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten of in één der symmetrie-vlakken of in 't oneindig ver gelegen vlak — gaan 10 synnormalen, waarvan hoogstens 2 in een zelfde vlak kunnen liggen.

Nemen wij nu een punt P aan op 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten. Noemen wij 't punt, waarvan P één der hoofdkromtemiddelpunten is, V_1, dan kunnen wij uit P nog 4 normalen op E neerlaten, wier voetpunten wij V_2, V_3, V_4 en V_5 noemen.

Beschouwen wij nu 't punt V_1 als ontstaan door 't samenvallen van 2 der voetpunten van uit een zelfde punt neergelaten normalen, dan kunnen wij slechts op 7 verschillende ma-

nieren paren van vlakken aanbrengen, die van de 6 punten elk 3 bevatten. Die vlakkenparen zijn:

I. $V_1 V_2 V_3$, $V_1 V_4 V_5$,
II. $V_1 V_2 V_4$, $V_1 V_3 V_5$,
III. $V_1 V_2 V_5$, $V_1 V_3 V_4$,
IV. $V_1 V_1 V_2$, $V_3 V_4 V_5$,
V. $V_1 V_1 V_3$, $V_2 V_4 V_5$,
VI. $V_1 V_1 V_4$, $V_2 V_3 V_5$,
VII. $V_1 V_1 V_5$, $V_2 V_3 V_4$.

Nu liggen (volgens § 34) de 3 synnormalen, die behooren bij de vlakkenparen I, II en III, in 't zelfde hoofdkromtevlak van V_1.

Door een punt P van 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten gaan dus 7 synnormalen; 3 hiervan liggen in 't raakvlak in P aan dat oppervlak.

Noemen wij nu P een willekeurig punt in een der symmetrie-vlakken b.v. in 't vlak XOY, V_1, V_2, V_3 en V_4 de voetpunten der normalen in dat vlak uit P op *E* neergelaten, V_5 en V_6 de voetpunten der beide andere normalen, dan ligt P op de synnormalen, die behooren bij de volgende vlakkenparen:

I. $V_1 V_2 V_5$, $V_3 V_4 V_6$,
II. $V_1 V_2 V_6$, $V_3 V_4 V_5$,
III. $V_1 V_3 V_5$, $V_2 V_4 V_6$,
IV. $V_1 V_3 V_6$, $V_2 V_4 V_5$,
V. $V_1 V_4 V_5$, $V_2 V_3 V_6$,
VI. $V_1 V_4 V_5$, $V_2 V_3 V_6$.

Kiezen wij 't punt P op één der symmetrie-assen, dan blijkt, dat P op 5 synnormalen ligt — de bedoelde symmetrie-as meegeteld —, terwijl O — 't middelpunt van *E* — en de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen elk op 7 synnormalen liggen.

Door een willekeurig punt in één der symmetrie-vlakken gaan 6 synnormalen; door een punt op één der symmetrie-assen gaan er 5, en door den oorsprong en de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen gaan 7 synnormalen.

§ 36. Wij hebben gezien, dat de synnormalen een congruentie (10,6) vormen. Bij een willekeurige synnormaal behooren 2 vlakken φ en φ'; laten wij nu s de congruentie (10,6) doorloopen, dan doorloopt ook de snijlijn (φ, φ') een congruentie van lijnen.

Op deze congruentie vestigt Dr. P. H. Schoute de aandacht in de boven aangehaalde verhandeling „Over 't projecteeren op oppervlakken"; wij willen van deze congruentie den graad en de klasse bepalen.

Noemen wij G een willekeurig punt der ellipsoïde E en R en S de hoofdkromtemiddelpunten van G. Door R gaan nu 3 lijnen s_1, s_2, s_3, die synnormalen zijn en liggen in 't raakvlak aan 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten in R (§ 35). Elk dezer synnormalen wijst op een lijn van de congruentie (φ, φ'), die door G gaat. Eveneens wijzen 3 der door S gaande synnormalen op 3 lijnen van de congruentie (φ, φ'), waarop G ligt.

Daar er behalve deze 6 lijnen, geen lijnen van de congruentie (φ, φ') door G gaan, is de graad van deze congruentie 6.

Er zijn 4 gevallen, dat de vlakken (φ en φ') evenwijdig aan elkaar zijn (§ 32), dus de lijn (φ, φ') ligt 4 maal in 't vlak in 't oneindige. Daar dit vlak een symmetrie-vlak is, zal een willekeurig vlak er 8 lijnen van de congruentie (φ, φ') bevatten.

De lijnen van de congruentie (φ, φ') *vormen dus een congruentie (6,8). De lijnen, die de polen der vlakkenparen* φ *en* φ' *onderling verbinden, vormen een congruentie (8,6).*

§ 37. Zijn φ en φ' een paar raakvlakken aan 't oppervlak Φ_4, waarbij dezelfde lijn als synnormaal behoort, dan willen wij nu 't punt bepalen, waarin één dier vlakken — b.v. φ — het oppervlak Φ_4 aanraakt. Nemen wij in φ een as, die de ellipsoïde E snijdt in V_1 en V_2, dan zijn de raakvlakken aan Φ_4, die door $V_1 V_2$ gaan, gemakkelijk aan te geven. Noemen wij V_3, V_4, V_5, V_6 de voet-

punten der andere normalen, getrokken uit het snijpunt der normalen in V_1 en V_2, dan zijn de vlakken V_1 V_2 V_i ($i = 3$, 4, 5 of 6) de bedoelde vier raakvlakken.

Wij kunnen nu in φ 2 assen aanwijzen, die dragers zijn van een paar samenvallende raakvlakken. Laat de lijn (φ, φ') E snijden in I_1 en J_1, en laten I_1I_2 en I_1I_3 de beide assen zijn door I_1, die in 't vlak φ liggen, waarbij I_2 en I_3 de beide tweede snijpunten dier assen met E zijn, dan gaan door I_2I_3 slechts 3 vlakken, die Φ_4 raken. De normalen in I_2 en I_3 snijden n.l. elkaar en den normaal in I_1 in één der hoofdkromtemiddelpunten van I_1, en uit dat punt kunnen slechts 5 normalen getrokken worden. De lijn I_2I_3 is dus een raaklijn aan 't oppervlak Φ_4. Wij kunnen, uitgaande van 't punt J_1, eveneens een lijn J_2J_3 bepalen, die in 't vlak φ ligt en ook een raaklijn is aan 't zelfde oppervlak. 't Snijpunt van I_2I_3 en J_2J_3 is 't punt, waarin 't vlak φ 't oppervlak Φ_4 aanraakt.

§ 38. Wij noemen (fig. 11) s een willekeurige synnormaal, ε één harer „halve projecties", φ 't vlak waarin ε ligt, en s_p de projectie van s op 't vlak φ. Uit elk punt van s_p kunnen wij nu 3 normalen aan ε trekken — s_p zelf niet meegeteld. Trekken wij die normalen uit alle punten van s_p en verbinden wij de voetpunten der uit een zelfde punt getrokken normalen, dan omhullen die verbindingslijnen een parabool; wij hebben gezien, dat die lijnen de assen zijn in 't vlak φ. Nu is de lijn s_p een raaklijn aan de ontwondene van ε en zal zij, daar die ontwondene van den zesden graad is, haar in nog 4 punten snijden. Noemen wij T_p een dier snijpunten en U 't punt van ε, dat T_p tot kromtemiddelpunt geeft, dan is de raaklijn aan ε in U tevens een as, dus een raaklijn aan de assenparabool in φ. De 4 snijpunten van s_p met de ontwondene van ε geven ons dus de 4 gemeenschappelijke raaklijnen van ε en de assenparabool. Die gemeenschappelijke raaklijnen willen wij nog op een andere manier bepalen.

Zij nu Q de pool van 't vlak φ en Q_p de projectie van Q op φ, dan vormen de raaklijnen van de assenparabool de meetkundige plaats der verbindingslijnen van de overeenkomstige punten van 2 projectieve puntreeksen (§ 2); van de beide puntreeksen ligt de eene op de lijn in 't oneindige en de andere op de poollijn van Q_p ten opzichte van ε. Uit deze voortbrenging volgt, dat de gemeenschappelijke raaklijnen van ε en de assenparabool ε aanraken in de voetpunten der normalen uit Q_p aan ε getrokken.

Trekken wij de raaklijnen aan de ontwondene van ε in de 4 punten, waarin een harer raaklijnen haar snijdt, dan zullen die 4 raaklijnen dus door een zelfde punt gaan.

Deze stelling is bekend en afkomstig van Laguerre [1]); wij kunnen 't snijpunt der 4 raaklijnen hier aangeven. Zij n.l. s_p de raaklijn, wier 4 snijpunten met de ontwondene wij nemen, dan is Q_p 't snijpunt der raaklijnen in die 4 punten aan de ontwondene getrokken.

Hieruit leiden wij een eigenschap van 't vlak φ en de aan haar toegevoegde „normaalstraal" q (QQ_p) af. In fig. 11 is T_p de projectie op 't vlak φ van een punt T op s; T is dus één der hoofdkromtemiddelpunten van U. Eén der hoofdkromtevlakken van U is dus 't vlak gebracht door UT en de raaklijn aan ε in U, 't tweede hoofdkromtevlak gaat door UT en staat loodrecht op 't eerste en bevat dus de lijn q. De 4 raakvlakken, die door q aan 't oppervlak der hoofdkromtemiddelpunten gebracht kunnen worden, raken dus dat oppervlak aan in 4 punten van de lijn s; die punten zijn hoofdkromtemiddelpunten van 4 der punten van ε.

Is φ een raakvlak van 't oppervlak Φ_4 en q de aan φ toegevoegde normaalstraal, dan zijn de 4 hoofdkromtevlakken, die door q gaan, dus hoofdkromtevlakken in punten van de doorsnede van φ met E.

---

[1]) Laguerre: Comptes rendus des séances de l' Académie des sciences, 1877; of Œuvres complètes II, pag. 470.

HOOFDSTUK V.

DE „CENTRA" VAN VLAKKEN.

§ 89. Wij hebben gezien (§ 16), dat Laguerre onder centrum van een vlak verstaat, »'t punt, waarvan de coördinaten de tegengestelden zijn van de stukken, door dat vlak van de assen afgesneden«. Hij geeft betreffende die centra een paar grondstellingen, n.l:

I. Wentelt een vlak om een lijn, dan beschrijft 't centrum van dat vlak een kromme van den derden graad, waarop de oorsprong en de oneindig ver gelegen punten der assen liggen.

II. Beschrijft een punt een lijn, dan beschrijft 't vlak, waarvan dit punt 't centrum is, een vlakkenbundel van de derde klasse; tot die vlakken behooren de symmetrie-vlakken en 't oneindig ver gelegen vlak.

Wij laten — om stelling I te bewijzen — een vlak α om een lijn l wentelen, en wenschen te bepalen de meetkundige plaats van 't punt A, waarvan de coördinaten *gelijk* zijn aan de stukken door α van de assen afgesneden.

Wentelt α om l, dan wordt de gevraagde meetkundige plaats gevormd door de snijpunten der overeenkomstige vlakken van 3 projectieve vlakkenbundels, wier assen in 't oneindig ver gelegen vlak liggen. 't Punt A beschrijft dus een kromme van den derden graad; op die kromme

liggen de oneindig ver gelegen punten der assen en de oorsprong. 't Punt A ligt diametraal tegenover 't punt A', dat wij 't centrum van α noemen. Bij de wenteling van α om l brengt dus ook A' een kromme van den derden graad voort, die de 4 genoemde punten bevat.

Stelling II wordt op geheel overeenkomstige wijze bewezen.

Beide stellingen zijn omkeerbaar. De omgekeerden luiden:

I*a*. De punten eener kromme van den derden graad, die den oorsprong en de oneindig ver gelegen punten der assen bevat, zijn centra van de vlakken van een bundel.

II*a*. De centra der vlakken van een vlakkenbundel van de derde klasse, waartoe de symmetrie-vlakken en 't oneindig ver gelegen vlak behooren, vormen een rechte lijn.

Projecteeren wij — om stelling I*a* te bewijzen — de kubische ruimtekromme punt voor punt op de symmetrie-assen, dan ontstaan op die assen perspectieve puntreeksen. De vlakken door de overeenkomstige punten brengen een lijn voort; dus snijden ook de vlakken, wier centra op de kubische ruimtekromme liggen, elkaar in één lijn.

Stelling II*a* wordt op geheel overeenkomstige wijze bewezen.

Opmerking: Laten wij een vlak α wentelen om een lijn l, dan beschrijft A' — 't centrum van α — dus een kromme van den derden graad.

Deze kromme kan in sommige gevallen ontaarden, n.l. als de lijn l één of meer der symmetrie-assen snijdt, of in V_∞ ligt. Stellen wij ons voor:

1°. dat l één der symmetrie-assen, b.v. de Z as, snijdt in een punt P $(0, 0, p)$. Laten wij nu 't vlak α om l wentelen, dan beschrijft 't centrum van α een hyperbool in 't vlak $z = -p$ (§ 5, St. I).

2°. dat l 2 der symmetrie-assen snijdt, m.a.w. dat l in één der symmetrie-vlakken, b.v. 't vlak XOY, ligt. Is nu

Q 't centrum van l t.o.v. de symmetrieassen in 't vlak XOY, dan beschrijft 't centrum van α de lijn, die in Q loodrecht op dat vlak staat.

3°. dat l de 3 symmetrie-assen in O snijdt. Wentelt nu α om l, dan is steeds O 't centrum van α.

4°. dat l in V_∞ ligt; de vlakkenbundel, die l tot drager heeft, bestaat dan uit evenwijdige vlakken. De centra van al deze evenwijdige vlakken liggen op een middellijn.

§ 39*a*. Omtrent deze centra bewijs ik hier nog 3 stellingen, waarvan de eerste reeds in § 33 gebruikt is, terwijl de beide anderen later van nut zullen zijn.

I. De centra van alle vlakken, die door een vast punt gaan, vormen een oppervlak van den derden graad.

Bewijs: Wij laten een vlak α wentelen om een willekeurig punt P, en vragen dan naar 't oppervlak, beschreven door 't centrum van α. Daarvoor beschouwen wij een willekeurige lijn l en bepalen hoeveel punten van 't gevraagde oppervlak op l liggen.

De punten van l zijn de centra van de osculatievlakken van een ruimtekromme van de derde klasse (§ 39, II); er zijn dus 3 vlakken, die 't punt P bevatten en wier centra op l gelegen zijn. De lijn l heeft dus 3 punten met 't gevraagde oppervlak gemeen, m.a.w. dat oppervlak is van den derden graad.

II. Zij O 't snijpunt van 3 onderling loodrechte coördinaat-assen, α een willekeurig vlak, A' 't centrum van dat vlak en S 't snijpunt van OA' met α, dan is $OS = \frac{1}{8}$ OA'.

Bewijs: De snijpunten van α met de coördinaat-assen noemen wij B, C en D; wij beschouwen nu 't rechthoekig parallelopipedum, waarvan OB, OC en OD 3 in één hoekpunt samenkomende ribben zijn (fig. 12). Dat parallelopipedum noemen wij OBECDHAG, waarbij A 't punt is, waarvan de coördinaten gelijk zijn aan de stukken door 't vlak BCD (α) van de coördinaat-assen afgesneden; dus is OA = OA'.

Zij L 't snijpunt der diagonalen van 't parallelogram OBEC, dan is LD de snijlijn der vlakken ODAE en BDC; OA snijdt 't vlak BDC dus in een punt van de lijn DL; dat snijpunt hebben wij reeds S genoemd.

Wij trekken nog de diagonaal DE van 't parallelopipedum en noemen K 't snijpunt van DE en OA; in driehoek DEO zijn dan DL en OK zwaartelijnen, die elkaar in S snijden.

Dus is $OS = \frac{2}{3} OK = \frac{1}{3} OA = \frac{1}{3} OA'$.

III. Zijn OX, OY en OZ de assen eener ellipsoïde E, is α een willekeurig vlak, A de pool van α met betrekking tot E, en A′ 't centrum van α, dan zal omgekeerd A′ de pool zijn van een vlak, dat A tot centrum heeft.

Bewijs: Omtrent deze stelling kunnen wij eerst opmerken, dat zij een uitbreiding is van een planimetrische stelling, die zeer gemakkelijk te bewijzen is. Wij noemen daarvoor ε een kegelsnee, p een willekeurige lijn, P de pool van p met betrekking tot ε en P′ het centrum van p t. o. v. de symmetrie-assen van ε; wij willen nu bewijzen, dat omgekeerd de lijn p', wier pool P′ is, P tot centrum heeft. Noemen wij V_1, V_2, V_3 en V_4 de snijpunten van p en p' met ε, dan zullen de normalen, in die 4 punten aan ε opgericht, elkaar in één punt snijden (§ 6), dus P — de pool van p — is 't centrum van p'.

Wij keeren nu terug tot de uitbreiding, vervat in stelling III.

Van 't willekeurige vlak α zij a_1 de doorsnee met 't vlak XOY, A_1 de projectie van de pool A en A_1' de projectie van 't centrum A′ van α op dat vlak; dan is A_1 tevens de pool van a_1 met betrekking tot de hoofdellips in 't vlak XOY en A_1' 't centrum van a_1 met betrekking tot de coördinaat-assen in dat vlak. Uit 't voorgaande blijkt, dat een lijn a_1', wier pool A_1' is, 't punt A_1 tot centrum zal hebben. 't Poolvlak α' van 't punt A′, waarvan A_1 de projectie is, moet de lijn a_1' bevatten; 't centrum van dat vlak moet dus liggen op de lijn, die in A_1 loodrecht op 't vlak XOY

staat. Noemen wij A_2 de projectie van A op 't vlak YOZ, dan toonen wij op dezelfde wijze aan, dat 't centrum van α' ligt op de lijn, die in A_2 loodrecht op 't vlak YOZ staat. Hiermee is dus aangetoond, dat A 't centrum is van 't vlak α' en stelling III bewezen.

§ 40. Wij willen nu stelling I van § 39 nader onderzoeken voor 't geval, dat de lijn, waarom 't vlak gewenteld wordt, deel uitmaakt van 't assencomplex. Stellen wij dus, dat een vlak gewenteld wordt om een *as*, die de ellipsoïde E snijdt in de punten V_1 en V_2. De normalen, aan E in V_1 en V_2 opgericht, snijden elkaar; dat snijpunt noemen wij R; de voetpunten der andere normalen, uit R op E neergelaten, noemen wij V_3, V_4, V_5 en V_6. Bij de wenteling van een vlak om V_1V_2 doorloopt nu 't centrum van dat vlak een ruimtekromme van den derden graad, waarop de centra van de vlakken $V_1V_2V_3$, $V_1V_2V_4$, $V_1V_2V_5$ en $V_1V_2V_6$ liggen. Wij weten, dat die centra de polen zijn der vlakken $V_4V_5V_6$, $V_3V_5V_6$, $V_3V_4V_6$ en $V_3V_4V_5$ (§ 16). Wentelt dus een vlak om de as V_1V_2, dan doorloopt 't centrum van dat vlak een kubische ruimtekromme, die de polen der 4 genoemde vlakken en de punten O, X_∞, Y_∞ en Z_∞ bevat.

Deze kromme kunnen wij ook op een andere wijze voortbrengen. Wij noemen (fig. 13) A_3 de pool van 't vlak $V_4V_5V_6$ en A_4 de pool van 't vlak $V_3V_5V_6$ en trekken de assen a_3 en a_4, waarvan die punten de polen zijn, loodrecht op hunne poolvlakken. Dan is A_3A_4 polair toegevoegd aan V_5V_6 en, daar beide lijnen assen zijn, kruisen ze elkaar loodrecht.

De assen a_3 en a_4 liggen dus beide in een zelfde vlak loodrecht op V_5V_6; dus a_3 en a_4 snijden elkaar in een punt, dat wij P noemen.

Bepalen wij dus de polen van de vlakken van het tetraëder $V_3V_4V_5V_6$, en trekken wij uit die polen loodlijnen op hun polair toegevoegde vlakken, dan zullen die 4 lood-

lijnen elkaar 2 aan 2 snijden; ze moeten dus door een zelfde punt gaan, daar ze niet in een vlak liggen. Dat gemeenschappelijk punt hebben wij P genoemd.

Wij hebben gezien, dat de kromme van Steiner van eenig punt gevormd wordt door de polen van de assen, die door dat punt gaan; de kromme van Steiner van P zal dus bevatten de polen der vlakken van 't tetraëder $V_3V_4V_5V_6$ en de punten O, X_∞, Y_∞ en Z_∞.

Deze kromme van Steiner valt dus geheel samen met de kubische kromme, die voortgebracht wordt door 't centrum van een om de lijn V_1V_2 wentelend vlak.

Wordt een vlak gewenteld om de lijn V_1V_2, die deel uitmaakt van 't assencomplex, dan beschrijft 't centrum van dat vlak dus een kubische kromme, die de kromme van Steiner van een punt P is.

Wij moeten nu 't verband tusschen de as V_1V_2 en 't punt P nauwer leggen; m.a.w. wij moeten aangeven, hoe wij P bepalen, wanneer de as V_1V_2 gegeven is.

In een bijzonder geval is dit verband gemakkelijk aan te geven, n.l. als de normalen, in V_1 en V_2 aan *E* opgericht, elkaar in een punt van *E* snijden. Wij noemen dat punt V_3 en de voetpunten der andere normalen, uit V_3 op *E* neergelaten, V_4, V_5 en V_6. Wij beschouwen weer 't tetraëder $V_3V_4V_5V_6$ (fig. 13*a*); de in V_3 samenkomende ribben zijn nu normalen aan *E*; de pool van 't vlak $V_4V_5V_6$ noemen wij weer A_3, de pool van 't vlak $V_3V_5V_6$ weer A_4.

Als verbindingslijn van de voetpunten der normalen, die in 't vlak $V_3V_5V_6$ liggen, is V_5V_6 polair toegevoegd aan a_4 — de loodlijn uit A_4 op $V_3V_5V_6$ neergelaten; daar A_3 de pool is van 't vlak $V_4V_5V_6$, moet A_3 dus liggen op a_4. Van de as a_4 is A_4 de pool.

De kromme van Steiner van A_3 moet dus A_4 bevatten en eveneens de polen der vlakken $V_3V_4V_6$ en $V_3V_4V_5$; 't gezochte punt P is dus in dit geval met A_3 samengevallen.

Dus is P ($=A_8$) hier de pool van 't vlak $V_4V_5V_6$ of ook 't centrum van 't vlak $V_1V_2V_3$.

Wij komen dus tot de volgende conclusie:

Wentelt een vlak om een lijn, die deel uitmaakt van 't assencomplex, dan beschrijft 't centrum van dat vlak de kromme van Steiner van een punt P. Dat punt P kunnen wij bepalen, wanneer de normalen, opgericht in de snijpunten van de as met de ellipsoïde E, elkaar snijden in een punt van E; P is in dat geval 't centrum van 't vlak, waarin die beide normalen liggen.

Wij willen nu aantoonen, dat 't punt P steeds 't centrum is van 't vlak, waarin de normalen, in V_1 en V_2 aan E opgericht, liggen, onverschillig of die normalen elkaar in een punt van E snijden of niet.

Wij wentelen nu een vlak om een as, die E in V_1 en V_2 snijdt, en stellen, dat de normalen, in V_1 en V_2 opgericht elkaar snijden in een punt R, dat niet op E ligt. Wij beschouwen nu een tweede ellipsoïde E', die met E gelijkvormig, gelijkstandig en gelijkmiddelpuntig is en op welks oppervlak R ligt. Beide ellipsoïden hebben 't zelfde assencomplex, en alle assen hebben dezelfde pool behouden; ook zal een zelfde as de voetpunten verbinden der normalen, die in een willekeurig vlak aan beide ellipsoïden getrokken kunnen worden; noemen wij nu V_1' en V_2' de snijpunten van V_1V_2 met E', en trekken wij in V_1' en V_2' de normalen aan E', die elkaar in R' snijden, dan zullen die normalen dus liggen in 't vlak V_1V_2R. 't Centrum van 't wentelend vlak beschrijft nu een kromme van den derden graad, die de kromme van Steiner is van een punt P; dat punt P is 't centrum van 't vlak $V_1'V_2'R'$ of 't centrum van 't vlak V_1V_2 R. Wij vinden dus:

Wentelt een vlak om een lijn, die deel uitmaakt van 't assencomplex, dan beschrijft 't centrum van dat vlak een kromme van den derden graad, die de kromme van Steiner is van een punt P; P is dan 't centrum van 't vlak, waarin de normalen liggen, wier voetpunten de as verbindt.

Verder blijkt hierbij:

Zijn V_1, V_2 . . . . V_6 *de voetpunten der normalen, uit een punt R neergelaten op een ellipsoïde E, dan zullen de loodlijnen, uit de polen der vlakken van 't tetraëder* $V_3 V_4 V_5 V_6$ *op de hun polair toegevoegde vlakken neergelaten, elkaar in een zelfde punt P snijden; P is dan 't centrum van 't vlak* $V_1 V_2 R$.

Deze laatste stelling kunnen wij beschouwen als een uitbreiding van de stelling van Desboves in § 3.

§ 41. Beschouwen wij de kromme van Steiner van een punt P, dan zijn de punten van deze kromme de centra van de vlakken van een vlakkenbundel. De as van dezen vlakkenbundel kunnen wij op de volgende wijze bepalen: neem 't vlak π', waarvan P 't centrum is, en bepaal de lijn, die de voetpunten der in π' liggende normalen verbindt, dan is deze lijn de gevraagde as.

§ 42. Noemen wij α een willekeurig vlak, A de pool en A' 't centrum van dat vlak, dan zal omgekeeerd 't vlak, welks pool A' is, A tot centrum hebben (39*a*. St. III).

Hebben wij een vlakkenbundel, waarvan de as a deel uitmaakt van 't assencomplex, en een daaraan polair toegevoegde puntenreeks a_1, dan volgt uit bovenstaande reciprociteit, dat de kromme van Steiner, wier punten de centra zijn der vlakken van den vlakkenbundel a, dus polair is toegevoegd aan een vlakkenbundel van de derde klasse, welks vlakken de punten van a_1 tot centra hebben.

Laten wij een punt een lijn beschrijven, die deel uitmaakt van 't assencomplex, dan weten wij, dat de punten van deze lijn de centra zijn van de vlakken van een vlakkenbundel van de derde klasse; uit 't voorgaande volgt nu, dat wij dien bundel nader kunnen onderzoeken door den vlakkenbundel na te gaan, die polair is toegevoegd aan de kromme van Steiner van eenig punt.

Wij onderzoeken nu dus eerst, wat gevormd wordt door

de vlakken, die aan de punten van de kromme van Steiner van een willekeurig punt P polair zijn toegevoegd.

Wij noemen daartoe (fig. 14) P een willekeurig punt, π 't aan P polair toegevoegde vlak, R_3 de kromme van Steiner van P en Q een willekeurig punt van R_3; dan is PQ een as, die Q tot pool heeft. 't Vlak φ, waarvan Q de pool is, snijdt π volgens een lijn (π, φ), die aan PQ polair is toegevoegd; hieruit volgt, dat (π, φ) de lijn is, die de voetpunten der in φ gelegen normalen verbindt (§ 12).

't Vlak φ, polair toevoegd aan een willekeurig punt Q van de kromme van Steiner van P, bevat dus 2 normalen, wier voetpunten in de doorsnee van φ met π liggen.

De kromme van Steiner van een punt P is dus polair toegevoegd aan een vlakkenbundel van de derde klasse, die gevormd wordt door de vlakken, die elk 2 der normalen bevatten, wier voetpunten liggen in het poolvlak van P.

In 't begin van deze § hebben wij aangetoond, dat deze vlakkenbundel van de derde klasse, die polair toegevoegd is aan de kromme van Steiner van P en waarvan elk vlak 2 normalen bevat, wier voetpunten in π liggen, ook nog op een ander wijze voortgebracht kan worden, n.l. als de meetkundige plaats van een vlak, welks centrum een rechte lijn beschrijft, die deel uitmaakt van 't assencomplex. Wij willen nu 't verband tusschen deze lijn en 't vlak π nauwer leggen.

In fig. 14*a* stelt ε de doorsnede van π met de ellipsoïde *E* voor, φ een vlak, dat 2 normalen bevat, wier voetpunten in π liggen, terwijl P' en Q' de centra der vlakken π en φ zijn.

Denken wij ons nu een vlak, dat gewenteld wordt om de snijlijn (π, φ), dan doorloopt 't centrum van dat vlak een kromme van Steiner en wel de kromme van Steiner van 't punt Q' (§ 40). Op die kromme ligt nu ook P'; zal echter P' een punt zijn van de kromme van Steiner van Q', dan moet Q' liggen op de *as p'*, waarvan P' de pool

is. Het centrum van elk vlak, dat 2 der normalen bevat, wier voetpunten in π liggen, ligt dus op de as p', wier pool 't centrum van π is.

Hiermee is 't zoo pas gevraagde verband gelegd en zijn wij gekomen tot de volgende stelling:

Doorloopt een punt een as p_1, dan beschrijft 't vlak, welks centrum dit punt is, een vlakkenbundel van de derde klasse; deze vlakkenbundel wordt gevormd door de vlakken, die elk 2 der normalen bevatten, wier voetpunten in een vlak π liggen; de pool van de as p' is hierbij 't centrum van 't vlak π.

Bij dit bewijs is verder nog gebleken:

Wanneer wij uit de polen van de vlakken van dezen vlakkenbundel loodlijnen trekken op de hun polair toegevoegde vlakken, dan gaan deze loodlijnen allen door een zelfde punt.

§ 43. Wij nemen nu een willekeurige synnormaal s, wier projectie op de ellipsoïde E bestaat uit de ellipsen ε en ε', respectievelijk gelegen in de vlakken φ en φ'; de polen van φ en φ' noemen wij Q en Q'; de assen, waarvan Q en Q' de polen zijn, heeten q en q'. Dan is Q' 't centrum van φ en Q 't centrum van φ'.

Trekken wij de normalen aan E in de punten van ε, en brengen wij door die normalen, 2 aan 2 genomen, vlakken, dan krijgen wij een vlakkenbundel van de derde klasse, waartoe de symmetrie-vlakken en 't vlak V_∞ behooren. De polen van de vlakken van dezen bundel vormen nu de kromme van Steiner van 't punt Q; de centra dezer vlakken vormen de as q'. Trekken wij eveneens alle normalen in de punten van ε', dan ontstaat een bundel van vlakken, wier polen op de kromme van Steiner van 't punt Q' en wier centra op de as q liggen.

§ 44. In fig. 15 stelt s een synnormaal voor, ε één der halve projecties van s op E, φ 't vlak waarin ε ligt, s_p de

projectie van s op φ, Q de pool van φ en Q_p de projectie van Q op φ. Verder is B 't tweede snijpunt van s_p met ε, M 't middelpunt van ε en E 't op ε diametraal tegenover B gelegen punt. Op s is een willekeurig punt T aangenomen, waarvan T_p de projectie op φ is; uit T kunnen wij 6 normalen op E neerlaten, van wier voetpunten V_1, V_2 en V_3 in φ liggen; de andere voetpunten V_4, V_5 en V_6 liggen op een tweede ellips ε' in een vlak φ'.

Wij denken ons nu een bol gebracht door de punten V_1, V_2, V_3 en V_4; die bol snijdt 't vlak φ volgens een cirkel, die met ε de punten V_1, V_2, V_3 en E gemeen heeft. 't Middelpunt van dien cirkel is 't midden van de lijn Q_pT_p (§ 8); wij noemen dat punt N_p. Noemen wij nu N 't middelpunt van den bol, dan is N_p de projectie van N op φ. De lijn NT, waarvan N_pT_p de projectie is, snijdt dus QQ_p.

Op dezelfde wijze kunnen wij aantoonen, dat NT de loodlijnen zal snijden uit de polen der vlakken $V_1V_2V_4$, $V_1V_3V_4$ en $V_2V_3V_4$ op de hun polair toegevoegde vlakken neergelaten.

Dat die 3 loodlijnen en de lijn QQ_p elkaar in één punt snijden, wisten wij reeds; dat snijpunt is 't centrum van 't vlak TV_5V_6 (§ 40, laatste stelling); daar deze lijnen niet in een vlak liggen, zal de lijn NT dus ook door dat snijpunt gaan. Noemen wij dat snijpunt P, dan is P 't centrum van 't vlak TV_5V_6; de lijn TP wordt dan, daar N_p 't midden is van T_pQ_p, in N middendoor gedeeld.

Laten wij uit een punt T 6 normalen op een ellipsoïde E neer, en brengen wij een bol door de voetpunten van 4 der normalen, dan is 't middelpunt van dien bol dus 't midden van de lijn, die T verbindt met 't centrum van 't vlak, dat de beide andere normalen bevat. [1])

---

[1]) Deze stelling wordt door Laguerre langs analytischen weg afgeleid; Nouvelles Annales de Mathématique 1878; of Œuvres complètes II, pag. 492.

§ 45. Wij trekken in E de raaklijn aan ε, en laten uit M een loodlijn op die raaklijn neer; 't snijpunt van die beide lijnen noemen wij F.

Wij verschuiven nu T langs de synnormaal s, en brengen telkens bollen aan, die de voetpunten bevatten van 4 der normalen uit T op E neergelaten; wij dragen hierbij zorg, dat van deze 4 voetpunten er telkens 3 in φ liggen. Al deze bollen bevatten E en F.

Door een punt V_1 van ε gaan dan 3 dezer bollen; er ontstaat dus een bollenbundel van den derden graad. De middelpunten der bollen liggen in een vlak ν, dat de lijn EF loodrecht middendoor deelt; dat vlak is zoowel evenwijdig aan de as QQ_p als aan de synnormaal s, en 't deelt den afstand tusschen die beide lijnen loodrecht middendoor.

In fig. 15 is N_p een willekeurig punt van de snijlijn der vlakken φ en ν, 't middelpunt van den cirkel $(V_1V_2V_3)$. Richten wij in N_p een loodlijn op φ op, dan liggen op die lijn dus de middelpunten der bollen $(V_1V_2V_3V_4)$, $(V_1V_2V_3V_5)$ en $(V_1V_2V_3V_6)$.

Elke lijn, in het vlak ν loodrecht op φ getrokken, bevat dus de middelpunten van 3 bollen, die door de voetpunten van 4 elkaar in een zelfde punt snijdende normalen gaan, waarbij dan telkens 3 der voetpunten in φ liggen, terwijl 't vierde in φ' ligt.

Om den graad te bepalen van de kromme, die de meetkundige plaats der middelpunten van deze bollen is, behoeven wij nog slechts na te gaan, of 't snijpunt van al deze loodlijnen ook 't middelpunt is van een of meer der bollen. Stel, dat snijpunt — 't oneindig ver gelegen punt van elk dezer lijnen — middelpunt is van een bol $(N_1N_2N_3N_4)$; daar 't middelpunt oneindig ver ligt, moet de bol ontaarden in de vlakken φ en V_∞, dus 't vlak φ zou dan de voetpunten van 4 elkaar in eenzelfde punt snijdende normalen bevatten.

Dit is echter onmogelijk; de meetkundige plaats der mid-

delpunten van deze bollen is dus een vlakke kromme van den derden graad. Daar deze kromme met de lijn QQ_p punt voor punt overeenstemt, is haar geslacht nul, en heeft zij dus een dubbelpunt.

§ 45*a*. Wij noemen weer T een willekeurig punt, R_3 de kromme van Steiner van T, $V_1, V_2 \ldots V_6$ de snijpunten van R_3 met de ellipsoïde *E*, welke punten de voetpunten zijn der normalen uit T op *E* neergelaten; O is 't middelpunt van *E*. Door 4 dezer voetpunten b.v. V_1, V_2, V_3 en V_4 brengen wij een bol; deze bol snijdt R_3 in nog 2 punten P en Q. Wij willen nu bewijzen, dat 't vlak PQO evenwijdig is aan 't vlak TV_5V_6.

Hiervoor leiden wij eerst 2 hulpstellingen af:

I. »Zijn 2 tetraëders ingeschreven in een ruimtekromme van den derden graad en omgeschreven aan een andere ruimtekromme van den derden graad, dan zijn oneindig veel tetraëders ingeschreven in de eerste en omgeschreven aan de tweede ruimtekromme».

Wij noemen, om dit te bewijzen, de beide tetraëders $V_1V_2V_3V_4$ en $W_1W_2W_3W_4$, de ruimtekromme, waarin ze zijn ingeschreven, k_3, en de andere, waarom ze beschreven zijn, λ_3; de punten V_1, V_2, V_3 en V_4 en W_1, W_2, W_3 en W_4 bepalen dan op k_3 een involutie van den vierden graad, waarvan zij 2 groepen van toegevoegde punten vormen.

Wij denken ons nu alle vlakken aangebracht, die k_3 snijden in 3 punten, die tot eenzelfde groep van toegevoegde punten behooren; deze vlakken omhullen dan een ruimtekromme van de derde klasse — dus ook van den derden graad.

Deze laatste — de involutiekromme der involutie op k_3 — heeft met λ_3 reeds 8 osculatievlakken gemeen, n.l. de zijvlakken der beide tetraëders $V_1V_2V_3V_4$ en $W_1W_2W_3W_4$, en valt dus met λ_3 samen; dus is λ_3 de kromme, die om-

huld wordt door de aldus aangebrachte vlakken. Er zijn dus oneindig veel tetraëders, die ingeschreven in k_3 en tegelijkertijd omgeschreven aan λ_3 zijn.

II. »Bestaat op een ruimtekromme van den derden graad k_3 een involutie van den vierden graad, waarbij de 3 in 't oneindige gelegen punten deel uitmaken van een zelfde viertal, dan zullen alle bollen, die k_3 in 4 toegevoegde punten snijden, nog 2 snijpunten met k_3 hebben, die aan allen gemeenschappelijk zijn».

Om dit te bewijzen, denken wij ons alle koorden van k_3 door 2 punten, die tot een zelfde viertal van toegevoegde punten behooren.

Uit een willekeurig punt P van k_3 projecteeren wij al deze lijnen; de op deze wijze voortgebrachte vlakken zijn raakvlakken aan een kegel van de derde klasse.

Nu brengen wij een bol aan door 4 toegevoegde punten V_1, V_2, V_3 en V_4; deze bol snijdt dan k_3 nog in 2 punten, die wij A en B noemen. Door A en B en nog 2 punten van k_3, W_1 en W_2, brengen wij een tweeden bol; deze punten W_1 en W_2 kiezen we zoo, dat ze behooren tot een zelfde viertal van toegevoegde punten, maar overigens willekeurig zijn. Tezamen bepalen deze 2 bollen een bollenbundel; elke bol uit den bundel snijdt k_3 in 6 punten, waarvan echter A en B vast zijn. Op k_3 ontstaat dus een tweede involutie van den vierden graad; de in 't oneindig gelegen punten van k_3 maken weer deel uit van een zelfde groep. De lijnen, die de toegevoegde punten dezer nieuwe involutie onderling verbinden, projecteeren wij weer uit P; de hierdoor voortgebrachte vlakken raken eveneens een kegel van de derde klasse. Deze kegel heeft echter met den vorigen 10 raakvlakken gemeen, n.l. de 6 vlakken, waardoor de ribben van 't tetraëder $V_1V_2V_3V_4$ geprojecteerd worden, 't vlak PW_1W_2 en de 3 vlakken, die de in 't oneindige gelegen koorden van k_3 projecteeren.

De beide kegels hebben dus al hun raakvlakken gemeen,

en de beide involuties op k_3 vallen samen. Alle bollen van den bundel zullen dus k_3 snijden in 4 toegevoegde punten der involutie en verder nog in 2 vaste punten.

Hiermee is de hulpstelling bewezen.

Wij brengen nu op R_3 — de kromme van Steiner van 't punt T – een dergelijke involutie voort op de volgende wijze:

Van 't vlak TV_5V_6 bepalen wij de pool L; uit L trekken wij de lijn l loodrecht op 't vlak TV_5V_6. Wij weten, dat de vlakken, waarvan de punten van l de centra zijn, een vlakkenbundel van de derde klasse vormen (§ 42); tot dezen bundel behooren de symmetrievlakken en V_∞, m. a. w. de vlakkenbundel wordt gevormd door de osculatievlakken van een ruimteparabool, die wij π noemen. Ook de zijvlakken van het tetraëder V_1 V_2 V_3 V_4 behooren tot dezen vlakkenbundel. Beschouwen we nu de krommen R_3 en π, dan blijkt, dat R_3 omgeschreven is om de tetraëders V_1 V_2 V_3 V_4 en OX_∞ Y_∞ Z_∞ —waarbij X_∞ Y_∞ en Z_∞ de snijpunten voorstellen van V_∞ met de symmetrie-assen —, terwijl π in die tetraëders is ingeschreven.

De osculatievlakken van π vormen dus oneindig veel tetraëders, die in R_3 ingeschreven zijn (hulpstelling I); hierdoor wordt dus op R_3 een involutie van den vierden graad bepaald, waarvan X_∞, Y_∞ en Z_∞ met O een groep van onderling toegevoegde punten vormen. De bollen, die nu door de groepen van toegevoegde punten gebracht worden, zullen een bundel vormen; ze snijden R_3 nog in 2 vaste punten. Een dezer bollen ontaardt in V_∞ en een middelvlak, dat dus de beide vaste punten bevat. Om dit vlak te bepalen beschouwen wij een der symmetrie-vlakken b.v. 't vlak XOY (fig. 16); A B zij de doorsnede van 't vlak T V_5 V_6 en ε de in het symmetrie-vlak gelegen hoofdellips; L projecteert zich in L_p, de pool van A B t. o. v. ε en l projecteert zich volgens l_p, de loodlijn uit L_p op A B neergelaten.

De vlakken, wier centra op de lijn l liggen, snijden 't vlak XOY volgens lijnen, die een parabool omhullen; de centra van deze lijnen t. o. v. de X- en Y-assen liggen op l_p.

't Brandpunt F van deze parabool kunnen wij bepalen door cirkels te beschrijven om 2 der driehoeken, die door deze raaklijnen gevormd worden; gemakkelijk blijkt dan, dat F ligt op een lijn, door O evenwijdig aan A B getrokken.

Keeren wij terug tot den bundel van bollen, waarvan elk R_8 snijdt in 4 toegevoegde punten eener involutie en 2 vaste punten, dan is de bol ($O X_\infty Y_\infty Z_\infty$) een dezer bollen. Deze bol moet 't vlak XOY snijden volgens een cirkel, die omgeschreven is om een driehoek van raaklijnen aan de parabool, die in 't vlak XOY ligt; deze cirkel ontaardt dus in 2 lijnen, waarvan de eene in 't oneindige ligt en de andere 't brandpunt F van de parabool met O verbindt. De bol ($O X_\infty Y_\infty Z_\infty$) wordt dus gevormd door 2 vlakken, n.l. V_∞ en een vlak μ, dat 't vlak XOY snijdt volgens een lijn, die evenwijdig aan 't vlak TV_5V_6 is. Eveneens zullen de andere symmetrievlakken door dat vlak μ gesneden worden volgens lijnen evenwijdig aan TV_5V_6. Dus zullen de vlakken TV_5V_6 en μ evenwijdig zijn. 't Vlak μ snijdt nu R_8 in O en verder nog in 2 punten, die aan alle bollen van den bundel gemeen zijn; ook de bol $V_1V_2V_3V_4$ zal dus die beide punten bevatten.

Hiermee is dus bewezen de volgende stelling:

»*Zijn uit een punt T 6 normalen op een ellipsoïde neergelaten, en brengt men door 't middelpunt van die ellipsoïde een vlak evenwijdig aan een der vlakken, die 2 dezer normalen bevatten, dan zal dat middelvlak de kromme van Steiner van 't punt T nog snijden in 2 punten, die ook liggen op den bol, die de voetpunten der 4 andere normalen bevat.*» [1])

---

[1]) *Laguerre*: Nouvelles Annales de Mathématique 1878; of Œuvres complètes II, pag. 492.

HOOFDSTUK VI.

EEN BUNDEL VAN OPPERVLAKKEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD, DIE EEN GEMEENSCHAPPELIJKE SYNNORMAAL BEZITTEN.

§ 46. Wij noemen s een willekeurige synnormaal, de ellipsen ε en ε' hare halve projecties op de ellipsoïde E, φ en φ' de vlakken, waarin ε en ε' liggen.

Brengen wij alle vlakken aan, die elk 2 van de normalen bevatten, wier voetpunten in φ liggen, dan ontstaat een vlakkenbundel van de derde klasse; dezen vlakkenbundel hebben wij vroeger op nog 2 andere manieren voortgebracht. Noemen wij Q de pool van 't vlak φ, dan is deze bundel polair toegevoegd aan de kromme van Steiner van 't punt Q; noemen wij q' de as, die uit de pool van φ' loodrecht op φ' getrokken is, dan is deze bundel de meetkundige plaats der vlakken, wier centra op q' liggen. Wij willen dezen bundel op nog een andere wijze doen ontstaan.

Wij beschouwen daarvoor een bundel van oppervlakken van den tweeden graad — waaronder E —, die elkaar allen in de punten van ε aanraken; deze oppervlakken worden dus allen langs ε door dezelfde vlakken aangeraakt. Trekken wij nu in een willekeurig punt van ε de normaal aan E, dan is deze lijn ook normaal aan alle andere oppervlakken van den bundel.

Zij F een dezer oppervlakken, dan is s ook een synnormaal van F, en de vlakkenbundel, gevormd door de vlakken,

die elk 2 der normalen bevatten, wier voetpunten in φ liggen, staat in 't zelfde verband tot *F* als tot *E*. Deze vlakkenbundel bevat dus ook de symmetrie-vlakken van *F*, en hij bevat dus de symmetrie-vlakken van elk exemplaar van dezen bundel van oppervlakken.

De vlakkenbundel van de derde klasse, die gevormd wordt door de vlakken, die elk 2 der normalen bevatten, wier voetpunten in φ liggen, is ook te beschouwen als de meetkundige plaats der symmetrie-vlakken van alle oppervlakken van den tweeden graad, die E volgens ε aanraken.

Daar ook V_∞ een der vlakken van dezen bundel is, omhult de bundel een ruimteparabool.

Noemen wij O 't middelpunt van *E*, dan volgt uit het bovenstaande, dat in elk punt van OQ 3 der vlakken van dezen bundel loodrecht op elkaar staan; wij kunnen dus OQ de *richtlijn* van de ruimteparabool noemen.

§ 47. Wij keeren terug tot den bundel van oppervlakken van den tweeden graad, die elkaar in de punten van ε aanraken. Deze bundel heeft in *s* een gemeenschappelijke synnormaal; de projecties van *s* op al die oppervlakken hebben ε gemeen; wij willen bepalen:

1°. de meetkundige plaats van 't vlak φ', waarin de tweede halve projectie van *s* ligt;

2°. de meetkundige plaats van die halve projectie zelf.

Wij noemen *E* een willekeurig oppervlak uit dezen bundel, O 't middelpunt van *E*, A 't snijpunt van *s* met 't vlak φ, M 't middelpunt van ε, E 't cirkelpunt (§ 20) en Q de pool van φ; wij beginnen met den stand van 't vlak φ' aan te geven (fig. 17). Van 't vlak φ' is Q het centrum (blz. 23); trekken wij QO en nemen wij op 't verlengde van QO een stuk $OG = \frac{1}{3}$ QO, dan is G dus een punt van φ' (blz. 51); trekken wij hierna EO en nemen wij op 't verlengde van EO een stuk $OE' = EO$, dan is E' 't cirkelpunt van φ'. De lijn GE' ligt dus in 't vlak φ'.

Noemen wij D 't snijpunt van QE en E'G, dan is nu DE = EQ; dit blijkt door de stelling van Menelaus op driehoek OEQ toe te passen met DGE' als transversaal. Hierbij valt op te merken, dat de punten G en E' zich verplaatsen, als O langs QM verschoven wordt; 't punt D echter, dat gevonden wordt door de lijn QE met zich zelf te verlengen, is daarbij een vast punt.

Wij brengen nu door O en de synnormaal s een vlak; dit vlak snijdt φ volgens een lijn door A; 't tweede snijpunt van die lijn met ε noemen wij K.

De lijn OK is nu de middellijn, die als beschrijvende lijn ligt op de regelschaar H_2, die wij door ε, ε' en s gebracht hebben (§ 25). Nemen wij een lijn E'K', die ten opzichte van O diametraal tegenover EK ligt, dan is E'K' dus gelegen in 't vlak φ'. 't Vlak door 't punt D en de lijn E'K' is dus 't gevraagde vlak φ'.

Wij laten nu O de lijn QM doorloopen; van 't vlak φ' blijft 't punt D dan vast; de lijn E'K' is de snijlijn van 2 veranderlijke vlakken. 't Eene vlak is steeds evenwijdig aan φ en diametraal tegenover φ gelegen ten opzichte van 't veranderlijke punt O; dat vlak beschrijft dus een vlakkenbundel, welks as l_∞ in V_∞ ligt. Deze bundel is projectief met de puntenreeks O op QM.

Eveneens projectief (zelfs perspectief) met deze puntenreeks is de vlakkenbundel, voortgebracht door 't vlak (s,O); dus is de puntenreeks op ε, voortgebracht door K, en ten slotte de stralenbundel EK dit ook.

De stralenbundels EO en EK zijn dus onderling projectief, maar niet perspectief, daar de lijn EM niet met zich zelf overeenstemt; nemen wij n.l. 't punt O in M aan, dan zijn EM en EC aan elkaar toegevoegde stralen (C ligt op ε tegenover A).

't Vlak EOK bevat dus steeds 2 overeenkomstige stralen der projectieve stralenbundels EO en EK; dat vlak omhult dus een kegel van den tweeden graad. De lijn E'K' ont-

staat dus als snijlijn der overeenkomstige vlakken van 2 projectieve vlakkenbundels; één der bundels is van de eerste, de andere bundel is van de tweede klasse. Deze beide bundels hebben 't vlak φ overeenkomstig gemeen, zooals blijkt door 't punt O in M aan te nemen. De lijn E'K' beschrijft dus een regeloppervlak van den tweeden graad.

Op dat regeloppervlak ligt ook 't punt D. Nemen wij, om dit te bewijzen, op 't verlengde van QM 't punt O zoodanig aan, dat $OM = \frac{1}{2} QM$ is, dan bevat 't overeenkomstige vlak van den bundel l_∞ 't punt D. 't Vlak (s, O) staat dan loodrecht op φ en snijdt φ volgens AB; 't vlak EBO (K is nu in B gevallen) bevat ook 't punt D, daar de lijn QE geheel in dat vlak ligt.

De lijn E'K' zal dus in dit geval een lijn zijn, die door D en evenwijdig met EB loopt. 't Vlak φ' wordt dus voortgebracht door een veranderlijke lijn E'K' te projecteeren uit een punt D; de meetkundige plaats van E'K' is een regeloppervlak van den tweeden graad, waarop ook D ligt; 't vlak φ' beschrijft dus een vlakkenbundel.

De as van dezen bundel is de richtlijn van dit regeloppervlak, die door D gaat.

Brengen wij door ε — een der »halve projecties» van een synnormaal s op een ellipsoïde E — een bundel van oppervlakken van den tweeden graad, die allen E volgens ε aanraken, dan vormen de vlakken, waarin de tweede halve projecties van s op die oppervlakken liggen, dus een bundel.

Wij gaan nog 't oppervlak na beschreven door deze tweede halve projectie ε', wanneer 't punt O zich langs de lijn QM verplaatst. 't Vlak, waarin ε' ligt, wentelt om een lijn, die wij l noemen en 't punt D bevat. Elk vlak door l snijdt 't gevraagde oppervlak volgens de veranderlijke kegelsnee ε'; wij behoeven dus slechts na te gaan, of de snijpunten van ε' met l vast zijn of zich langs l verplaatsen; in 't laatste geval zal l — misschien als meervoudige lijn — op 't gevraagde oppervlak liggen. Wij bewijzen nu:

1e. dat de snijpunten van l met ε' *niet* vast zijn;

2e. dat elk punt van l slechts eenmaal op ε' ligt.

Uit den oppervlakkenbundel, waarvan elk oppervlak s tot synnormaal bij de kegelsneden ε en ε' heeft, kiezen wij er een willekeurig uit; dat oppervlak noemen wij E. De pool van 't vlak φ is steeds 't punt Q; de lijn QE is dus een raaklijn van E in E. 't Punt D zal dus niet op E en dus ook niet op ε' liggen, tenzij de lijn QE geheel op 't oppervlak E ligt; dit is alleen 't geval, als E de kegel is, die ε uit Q projecteert. Hieruit volgt dus, dat 't punt D eenmaal een snijpunt is van de vaste lijn l met de veranderlijke kegelsnee ε'; de snijpunten van l en ε' verplaatsen zich dus langs l en elk punt van l wordt eenmaal een der snijpunten. Elk vlak door l snijdt dus 't gevraagde oppervlak volgens een kegelsnee ε' en de lijn l, die bij 't bepalen van den graad van dit oppervlak slechts éénmaal geteld mag worden. Dus:

't Oppervlak door ε' beschreven is van den derden graad.

HOOFDSTUK VII.

EEN RUIMTE-UITBREIDING VAN DE STELLING VAN JOACHIMSTHAL.

§ 48. In dit hoofdstuk stel ik me voor een nieuw bewijs te geven voor de stellingen van Joachimsthal en Tesch, en daarna een ruimte-analogon van de eerstgenoemde stelling af te leiden.

Van de ellips ε (fig. 18) is B een willekeurig punt en AB de normaal in B, terwijl B_1 en B_2 punten zijn, die met B symmetrisch liggen t. o. v. de assen der ellips; B' is 't tegenover B gelegen punt, P en Q zijn de projecties van B' op de assen, X_1, X_2, Y_1 en Y_2 zijn de toppen.

Wij beschouwen B', P, Q en O — 't middelpunt van ε — als basispunten van een bundel van kegelsneden; deze snijden op ε een involutie van den derden graad in. De assen van al deze kegelsneden zijn evenwijdig aan die van ε. Denken wij ons nu uit alle punten van de normaal AB de andere normalen aan ε getrokken, dan vormen de voetpunten dezer normalen een nieuwe involutie van den derden graad op ε; deze involutie is identisch met de vorige, daar wij 3 groepen van punten kunnen aangeven, die toegevoegde drietallen zijn van beide involuties, nl. X_1, X_2 en B_1, Y_1, Y_2 en B_2, en de beide oneindig ver gelegen punten van ε en B'; (dat deze 3 laatstgenoemde punten een groep van toegevoegde punten der laatste involutie vormen, blijkt door een ellips aan te bren-

gen door de punten B', P, Q en O gelijkvormig met ε). Zijn V_1, V_2 en V_3 de voetpunten van 3 normalen, die elkaar in een zelfde punt van AB snijden, dan liggen deze punten dus met P, Q, O en B' in den omtrek van een kegelsnede, wier assen evenwijdig zijn aan die van ε; hieruit volgt dat V_1, V_2, V_3 en B' — de snijpunten van 2 kegelsneden met evenwijdige assen — in den omtrek van een cirkel liggen.

De stelling van Joachimsthal is hiermee nog eens bewezen.

Opmerking. Wij hebben vroeger gezien, dat elke cirkel, gebracht door 3 punten van ε, die voetpunten zijn van elkaar op AB snijdende normalen, behalve B' nog een tweede vast punt heeft, nl. F, d. w. z. 't snijpunt van de raaklijn in B' aan ε met de loodlijn uit O op haar neergelaten. Deze eigenschap is ook direct uit 't bovenstaande af te leiden.

Denken we ons uit de punten van de normaal AB de andere normalen op ε neergelaten, dan is hierdoor op ε een involutie van den derden graad bepaald, waarbij de in 't oneindig gelegen punten van ε deel uitmaken van een zelfde drietal. Nu weten wij, dat alle cirkels, die ε snijden in drie toegevoegde punten dezer involutie, een bundel vormen (§ 4, hulpstelling); een der basispunten van dezen bundel is B', 't andere willen wij bepalen. Hiervoor herhalen wij, dat B' met de oneindig ver gelegen punten van ε een drietal van toegevoegde punten vormt (zie boven); een der cirkels van Joachimsthal wordt dus gevormd, door de lijn l_∞ en een tweede lijn, die met ε 't punt B' 2 maal gemeen moet hebben en ε dus in B' moet aanraken. 't Gevraagde punt ligt dus op de raaklijn, in B' aan ε getrokken.

Verder kunnen wij een cirkel brengen door de punten B', O, P en Q; uit 't bovenstaande bewijs blijkt, dat ook de 3 punten, waarin deze cirkel ε nog snijdt, toegevoegde punten der involutie op ε zijn. Deze cirkel is dus de

cirkel van Joachimsthal voor die 3 punten; 't gevraagde tweede basispunt is dus 't tweede snijpunt van dezen cirkel met de raaklijn in B' aan ε, d. i. 't punt F.

§ 49. Wij bewijzen eveneens de stelling van Tesch (blz. 5) nogmaals. In fig. 19 stelt ε weer een ellips voor, B een willekeurig punt dier ellips, AB de α-normaal in B aan ε, B' 't tegenover B gelegen punt en O 't middelpunt van ε; X_1X_2 en Y_1Y_2 zijn een paar toegevoegde middellijnen, die elkaar onder een hoek α snijden, en X'_1X_2' en Y'_1Y_2' zijn 't tweede stel toegevoegde middellijnen, die onderling dien hoek vormen. Nu liggen de voetpunten der α-normalen, uit een willekeurig punt op ε neergelaten, met dit willekeurig aangenomen punt op een hyperbool, wier asymptoten evenwijdig zijn aan X_1X_2 en $Y_1'Y_2'$ (te bewijzen als de analoge stelling omtrent de voetpunten der normalen, uit een willekeurig punt op ε neergelaten, en de hyperbool van Apollonius van dat punt).

Wij noemen nu C en D de snijpunten van AB met X_1X_2 en $Y_1'Y_2'$, B_1 't tweede snijpunt van ε met de lijn, door B evenwijdig aan $Y_1'Y_2'$ getrokken, en B_2 't tweede snijpunt van ε met de lijn, door B evenwijdig aan X_1X_2 getrokken.

Kiezen wij nu 't punt C als uitgangspunt der α-normalen, dan ontaardt de hyperbool door de voetpunten in een stelsel van 2 lijnen; een dezer lijnen is X_1X_2, terwijl de andere lijn B bevatten en evenwijdig aan $Y_1'Y_2'$ zijn moet; deze lijn is dus BB_1. Kiezen wij D als uitgangspunt der normalen, dan blijkt op dezelfde wijze, dat de hyperbool door de voetpunten ontaardt in de lijnen $Y_1'Y_2'$ en BB_2.

Wij trekken nu $B'B_1$; deze lijn is evenwijdig aan $X_1'X_2'$ daar BB_1 en B_1B' richtingen van toegevoegde middellijnen zijn; 't snijpunt van $B'B_1$ en $Y_1'Y_2'$ noemen wij P. Eveneens is $B'B_2$ evenwijdig aan Y_1Y_2; 't snijpunt van $B'B_2$ en X_1X_2 heet Q. Nu is $\angle$ B'PO $= \angle$ $X_2'OY_2'$ $= \alpha$ en $\angle$ B'QO $=$ Y_2OX_1 $=$ $180^0 - \alpha$; de punten B', P, O en

Q liggen dus op een cirkelomtrek. Alle kegelsneden door deze 4 punten hebben dus dezelfde assenrichtingen; die richtingen bepalen wij nu eerst door het lijnenpaar X_1X_2 en $B'PB_1$ als een dezer kegelsneden te beschouwen. Daar deze lijnen ten opzichte der assen van ε antiparallel zijn, zijn de assen van elke kegelsnee door B', P, O en Q evenwijdig aan die van ε. Wij kunnen 't bewijs der stelling van Tesch nu verder geheel op dezelfde wijze geven als dat van de stelling van Joachimsthal. (Vergelijk Dr. P. H. Schoute, Sur les normales d'angle α, Mathesis, 1887, blz. 38—44.)

Opmerking: Trekken wij uit eenig punt van de α-normaal AB de 3 andere α-normalen aan ε, dan zal de cirkel, die door de 3 voetpunten dezer α-normalen gebracht is, ε voor de vierde maal in B' snijden. Wij kunnen van dezen cirkel nog steeds een tweede vast punt aangeven.

Wij weten, dat alle cirkels, gebracht door de voetpunten van de α-normalen, die elkaar in een zelfde punt van AB snijden, een bundel vormen; een der basispunten van dezen bundel is B'. 't Andere basispunt moet liggen op de raaklijn in B' aan ε, daar een der cirkels uit den bundel ontaardt in deze raaklijn en l_∞.

Verder zal een der cirkels door de punten B', Q, O en P gaan; trekken wij nu uit O een lijn, die de raaklijn in B' onder een hoek α snijdt in een punt F, — waarbij wij zorg dragen, dat F en P aan denzelfden kant van OB' liggen —, dan is $\angle OFB' = \angle OPB'$, en ligt F dus ook op dien cirkel. 't Punt F is dus 't tweede basispunt van dezen cirkelbundel.

§ 50. Als ruimte-uitbreiding der stelling van Joachimsthal bewijzen wij nu de volgende stelling:

»*Laat men uit een punt P 6 normalen op een ellipsoïde E neer, en brengt men dan door 5 der voetpunten een omwentelingsoppervlak van den tweeden graad aan, welks as even-*

wijdig is aan een der symmetrie-assen van E, dan bevat dat oppervlak ook 't punt, dat tegenover 't zesde voetpunt gelegen is. [1])

Om dit te bewijzen noemen wij B een willekeurig punt der ellipsoïde *E*, AB de normaal in B aan *E*, B' 't tegenover B gelegen punt, en O 't middelpunt van *E*. Wij projecteeren nu AB op *E*; de projectie van deze lijn op een ellipsoïde is een ruimtekromme van den vierden graad. Uit elk punt van AB kunnen wij 6 normalen op *E* neerlaten; verplaatsen wij het punt op AB aangenomen langs AB, dan is een der voetpunten — n.l. B — vast, terwijl de 5 andere] dus de ruimtekromme van den vierden graad op *E* beschrijven. Van deze kromme, die wij R_4 noemen, is B een dubbelpunt; B verschijnt n.l. op R_4 als projectie der *beide* hoofdkromtemiddelpunten van *E* in B.

Daar R_4 een dubbelpunt heeft, is zij dus rationaal. De voetpunten der normalen aan *E*, die elkaar in de punten van AB snijden, vormen nu op R_4 een involutie van den vijfden graad.

't Punt B' projecteeren wij nu op de symmetrie-vlakken en daarna op de symmetrie-assen van *E*; die projecties noemen wij L, M, N, P, Q en R. Wij willen nu aantoonen, dat elk vijftal van toegevoegde punten der involutie op R_4 met O, B', L, M, N, P, Q en R op één oppervlak van den tweeden graad liggen, welks symmetrie-assen evenwijdig zijn aan die van *E*. Eerst kunnen wij opmerken, dat door de 8 punten O, B', L . . . . . R nog geen bundel van oppervlakken van den tweeden graad bepaald is; deze punten, die de hoekpunten vormen van een rechthoekig parallelopipedum, bepalen een net van oppervlakken van den tweeden graad.

Wij geven nu eerst 4 gevallen aan, waarbij deze 8 punten met een vijftal van toegevoegde punten der involutie

[1]) Analytisch is deze stelling bewezen door Fontené: Nouvelles Annales, 1884, pag. 423.

op R_4 door een oppervlak van den tweeden graad verbonden kunnen worden; dit oppervlak bestaat 3 maal uit een stelsel van 2 vlakken, n.l. een der symmetrie-vlakken en een vlak door B' evenwijdig aan dit symmetrie-vlak, terwijl 't de vierde keer een ellipsoïde door O is, gelijkvormig met *E*, met B' als gelijkvormigheidspunt (deze ellipsoïde bevat B' en de 4 in 't oneindige gelegen punten van R_4). Nog te bewijzen valt dus, dat voor elke groep van toegevoegde punten der involutie op R_4 geldt, wat wij hier voor 4 bijzondere gevallen aantoonden.

Wij brengen nu oppervlakken van den tweeden graad door elke groep van 5 toegevoegde punten op R_4 en de punten B', L, M en N. Van de op deze wijze voortgebrachte oppervlakken kunnen wij al vast zeggen, dat ze geen bundel kunnen vormen; want wij hebben er al 4 aangegeven, die stellig niet tot één bundel behooren. Wij willen nu nagaan, hoe dikwijls hoogstens het gebeuren kan, dat een willekeurig punt op een dezer oppervlakken ligt; als dat punt kiezen wij 't dubbelpunt van R_4. Dit punt B zal tweemaal een der punten van een vijftal toegevoegde punten van R_4 zijn; verder zal van de andere oppervlakken er hoogstens één door B gaan. Stellen wij ons n.l. voor, dat B nog ligt op 2 dezer oppervlakken, aangeduid door ($V_1V_2V_3V_4V_5$B'LMN) en ($W_1W_2W_3W_4W_5$B LMN); deze 2 oppervlakken snijden elkaar volgens een kromme van den vierden graad, waarop B', B, L, M en N liggen. Door deze kromme is een bundel van oppervlakken van den tweeden graad bepaald, die allen R_4 snijden in 8 punten (B dubbel geteld). Deze bundel zou op R_4 een involutie van den vijfden graad insnijden, daar 3 der snijpunten vast zijn; deze involutie zou met de vorige involutie op R_4 samenvallen, daar zij er 2 volledige groepen mee gemeen heeft. Tot de oppervlakken uit dezen bundel zouden dan echter ook de 4 oppervlakken behooren, waarvan wij reeds aangaven, dat ze niet tot één bundel konden behooren; onze onderstelling, dat nog 2 oppervlakken ($V_1V_2V_3V_4V_5$B'LMN)

en ($W_1 W_2 W_3 W_4 W_5$B'LMN) door B gaan, is dus onjuist.

Het punt B ligt dus hoogstens op 3 der oppervlakken, die de groepen van toegevoegde punten van R_4 met de punten B', L, M en N verbinden; een willekeurig punt ligt dus ook hoogstens op 3 dezer oppervlakken, tenzij 't op alle gelegen is. Nu zagen wij, dat van deze oppervlakken reeds 4 de punten O, P, Q en R bevatten; zij gaan dus allen door O, P, Q en R.

Zijn nu U_1, U_2, U_3, U_4 en U_5 5 toegevoegde punten dezer involutie, dan liggen ze dus met de punten B', O, L, M, N, P, Q en R op een oppervlak van den tweeden graad; de symmetrie-assen van dat oppervlak moeten dus evenwijdig zijn aan die van *E*.

Uit dit laatste volgt weer, dat door de doorsnede van dit oppervlak met *E* een omwentelingsoppervlak van den tweeden graad gebracht kan worden; op dit omwentelingsoppervlak liggen dus U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 en B'. Hiermee is de stelling, in 't begin van deze § aangekondigd, bewezen.

HOOFDSTUK VIII.

ELKAAR SNIJDENDE NORMALEN AAN EEN HYPERELLIPSOÏDE.

§ 51. Bij een behandeling van bovengenoemd onderwerp komt 't mij wenschelijk voor, eerst de voornaamste eigenschappen van 't polair stelsel en 't assenstelsel bij een hyperellipsoïde aan te geven.

Zij 𝔈 deze hyperellipsoïde, dan is aan elk punt A een ruimte 𝔄 polair toegevoegd en omgekeerd; aan elke lijn a is een vlak α toegevoegd en omgekeerd.

Direct is te bewijzen: »ligt een punt A in de poolruimte van een punt B, dan ligt B in de poolruimte van A».

Hieruit volgen weer de volgende stellingen, die alle omkeerbaar zijn:

»Beschrijft een punt A een lijn, dan wentelt zijn poolruimte 𝔄 om een vlak; die lijn en dat vlak zijn polair toegevoegd».

»Beschrijft A een vlak, dan wentelt 𝔄 om een lijn; die lijn en dat vlak zijn polair toegevoegd».

»Beschrijft A een ruimte, dan wentelt 𝔄 om een punt; die ruimte en dat punt zijn polair toegevoegd».

»Beschrijft een lijn a een vlak, dan wentelt 't polair toegevoegde vlak α om een lijn; dat vlak en die lijn zijn polair toegevoegd».

»Beschrijft a een ruimte, dan wentelt α om een punt; die ruimte en dat punt zijn polair toegevoegd».

§ 52. Elke lijn, die haar poolvlak loodrecht kruist, noem ik een *as*, dat vlak een *assenvlak.*

Doorloopt een punt P de as a, dan wentelt de poolruimte van P om het assenvlak α; hierbij zal zich eenmaal 't geval voordoen, dat a loodrecht staat op die ruimte. Wij hebben dan 't volgende: een ruimte $\mathfrak{A}$, haar pool A, de loodlijn a op $\mathfrak{A}$ uit A neergelaten en 't vlak α in de ruimte $\mathfrak{A}$, dat aan a polair is toegevoegd. Nu noem ik — naar analogie van Reye — a de toegevoegde normaalstraal van $\mathfrak{A}$ en A de pool van a.

§ 53. Een symmetrie-ruimte $\mathfrak{R}$ snijdt $\mathfrak{E}$ volgens een ellipsoïde E.

Elke lijn in deze ruimte $\mathfrak{R}$, die deel uitmaakt van 't assenstelsel van E, behoort ook tot de assen van $\mathfrak{E}$. Wat hier gezegd is van de symmetrie-ruimten, geldt ook van de oneindig ver gelegen ruimte $\mathfrak{R}_\infty$. De symmetrie-ruimten en $\mathfrak{R}_\infty$ zonder ik verder uit.

Wij nemen dus nu een willekeurige ruimte $\mathfrak{A}$, en vragen, de assen van die ruimte en haar polen te bepalen. Hierbij noemen wij weer A de pool van $\mathfrak{A}$, a de loodlijn uit A op $\mathfrak{A}$ neergelaten, V 't voetpunt van die loodlijn en α 't poolvlak van a. De ruimte $\mathfrak{A}$ snijdt $\mathfrak{E}$ volgens een ellipsoïde E; de pool van α ten opzichte van E is 't punt V.

Wij brengen nu ruimten door a, die $\mathfrak{A}$ snijden volgens vlakken, die door V gaan; de polen dezer ruimten liggen in 't vlak α. Laten wij uit eenig punt van α een loodlijn neer op zijn poolruimte, dan ligt die lijn in de ruimte $\mathfrak{A}$ en is een as.

Wij kunnen dus de assen in een willekeurige ruimte $\mathfrak{A}$ *op de volgende wijze voortbrengen; wij projecteeren A, de pool van* $\mathfrak{A}$, *op* $\mathfrak{A}$ *en beschouwen verder alleen de ruimte* $\mathfrak{A}$ *en de daarin liggende ellipsoïde E. Van 't assenstelsel van E nemen wij alleen die lijnen, wier polen liggen in* α *— 't poolvlak van A's projectie V.*

§ 54. Van 't assenstelsel van E moeten dus die lijnen bepaald worden, wier polen in α liggen.

't Is duidelijk, dat in α zelf oneindig veel lijnen liggen, die aan de vraag voldoen; ze omhullen een parabool. De meetkundige plaats van de polen dier assen is een lijn, de poollijn van 't voetpunt der normaalstraal van α ten opzichte van de ellips van doorsnee van α met E. Nemen wij een willekeurig punt P in α aan, dan liggen 3 van de assen, die door P gaan, in $\mathfrak{A}$, n.l. de beide raaklijnen door P aan de parabool in α en de lijn, waarvan P zelf de pool is.

Beschouwen wij nu een punt Q, dat in $\mathfrak{A}$ buiten α ligt, dan gaan er door Q oneindig veel lijnen, die deel uitmaken van 't assenstelsel der ellipsoïde E; hiervan zijn er 3, wier polen in α liggen; door Q gaan dus 3 assen, die in $\mathfrak{A}$ liggen. Elk punt van $\mathfrak{A}$ is dus 't snijpunt van 3 assen, die in $\mathfrak{A}$ liggen.

Nemen wij in $\mathfrak{A}$ een willekeurig vlak π, dat α volgens een lijn l snijdt, dan bevat π weer oneindig veel lijnen, die deel uitmaken van 't assenstelsel van E; haar polen liggen op een lijn m. Onder al die lijnen is er slechts één *as*, n.l. de lijn, die 't snijpunt van l en m tot pool heeft. Een willekeurig vlak bevat dus in 't algemeen één as.

Wij kunnen echter 't vlak π zoodanig aannemen, dat de lijnen l en m samenvallen. Daartoe brengen wij in de ruimte $\mathfrak{A}$ de vlakken aan, die elk 2 der normalen aan E bevatten, wier voetpunten in α liggen; de pool van elke lijn, die in een dier vlakken ligt en deel uitmaakt van 't assenstelsel der ellipsoïde E, ligt in de snijlijn van dat vlak met α. Wij hebben gezien, dat die vlakken een bundel van de derde klasse vormen; de assen in elk dezer vlakken omhullen een parabool.

§ 55. Wij willen nu aantoonen, dat deze vlakken, die elk 2 der normalen aan E bevatten, wier voetpunten in α liggen, tevens de assenvlakken der ruimte $\mathfrak{A}$ zijn.

Noemen wij β een dier vlakken en W de pool van dat vlak ten opzichte van de ellipsoïde E, dan weten wij, dat VW loodrecht staat op β. Daar VA loodrecht staat op de ruimte $\mathfrak{A}$, kruist WA 't vlak β loodrecht; bovendien is WA de poollijn van β en dus een as, en β 't aan WA polair toegevoegde assenvlak.

§ 56. Beschouwen wij nu de assen, die samenkomen in een willekeurig punt A. Wij hebben aangetoond, dat een willekeurige ruimte door A 3 dezer assen bevatten zal (§ 54). De assen, die door A gaan, vormen dus een vierdimensionalen kegel van den derden graad; haar polen vormen een gewrongen kromme van den vierden graad, daar een willekeurige ruimte door A 4 dezer polen bevat, waaronder A voorkomt. Deze kromme bevat steeds 't middelpunt en de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen.

Nemen wij een dezer assen b.v. de as a, waarvan A de pool is, dan kunnen wij naar de meetkundige plaats der assenvlakken door a vragen. Aan die assenvlakken zijn de assen gelegen in α, 't poolvlak van a toegevoegd. Daar die assen in α een parabool omhullen, zullen alle assenvlakken door a een kegelruimte (v. d. tweede soort, d. w. z. met een toplijn) van den tweeden graad omhullen.

Op dezelfde wijze kunnen wij aantoonen, dat door een willekeurige lijn slechts één assenvlak gaat.

§ 57. Wij kunnen 't voorafgaande in 't kort aldus resumeeren:

In een willekeurige ruimte $\mathfrak{A}$ omhullen de assenvlakken een ruimteparabool; in elk dezer vlakken omhullen de assen een parabool.

Door een willekeurig punt P van $\mathfrak{A}$ gaan 3 assenvlakken, die in $\mathfrak{A}$ liggen; ook gaan door P 3 assen, die in $\mathfrak{A}$ liggen; ze zijn de doorsneden der 3 assenvlakken.

Elk willekeurig vlak in $\mathfrak{A}$ bevat één as.

De polen van alle assen in $\mathfrak{A}$ liggen in één vlak α.

De assen in 𝔄 vormen een lijnencongruentie (3,1).

De assen door een willekeurig punt vormen een vierdimensionalen kegel van den derden graad; de assenvlakken door een dier assen omhullen een kegelruimte (v.d. tweede soort) van den tweeden graad.

Elke willekeurige ruimte door A bevat 3 assen, die door A gaan; ook bevat die ruimte 3 assenvlakken, die door A gaan; deze assenvlakken ontstaan door vlakken aan te brengen, die elk 2 der 3 assen bevatten.

Door een willekeurige lijn door A gaat één assenvlak. De polen van alle assen, waarop A ligt, vormen een gewrongen kromme van den vierden graad (te vergelijken met de kromme van Steiner in de ruimte van 3 afmetingen), waarop 't middelpunt der hyperellipsoïde en de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen liggen.

De assenvlakken door A vormen een vlakkencongruentie (1, 3).

§ 58. Wij beschouwen nu een willekeurig punt P en vragen, hoeveel normalen wij uit P op een hyperellipsoïde kunnen neerlaten. De polen der assen, die door P gaan, vormen een gewrongen kromme van den vierden graad, die de hyperellipsoïde in 8 punten snijdt.

Uit een willekeurig punt P kunnen dus 8 normalen op een hyperellipsoïde neergelaten worden.

§ 59. Wij nemen nu een willekeurige ruimte 𝔄, en vragen naar de in die ruimte gelegen normalen.

Wij hebben gezien, dat de polen van alle assen in die ruimte in een bepaald vlak α liggen. Alle normalen in 𝔄 moeten dus haar pool, d.i. haar voetpunt, in α hebben liggen; zij zijn de normalen in de punten van de doorsnede van α met E — de in 𝔄 gelegen ellipsoïde.

De normalen aan 𝔈, die geheel in een willekeurige ruimte 𝔄 liggen, vormen dus een regeloppervlak van den vierden graad (normalie).

§ 60 In een bepaalde ruimte kunnen wij dus een assenvlak aanwijzen, dat de voetpunten bevat van alle normalen, die in die ruimte liggen; omgekeerd: hebben wij een assenvlak gegeven, dan kunnen wij steeds een ruimte aangeven, die alle normalen bevat, waarvan de voetpunten in dat vlak liggen. Is β dat gegeven assenvlak, dan bepalen wij eerst de lijn b, de poollijn van β, en brengen dan een ruimte door β loodrecht op b. Die ruimte is dan de gevraagde (§ 53).

§ 61. Is l een willekeurige as, die de hyperellipsoïde in P en Q snijdt, α een der assenvlakken door l, en $\mathfrak{A}$ de ruimte, die alle normalen bevat, waarvan de voetpunten in α liggen, dan volgt uit de §§ 54 en 55, dat de normalen in P en Q elkaar snijden en dat 't vlak, door die beide normalen gebracht, een assenvlak is. Eveneens blijkt daar: snijden 2 normalen elkaar, dan is de verbindingslijn der voetpunten een as; 't vlak, dat 2 snijdende normalen bevat, is een assenvlak.

Een vlak, dat geen assenvlak is, bevat in 't algemeen geen enkele normaal, maar kàn er één bevatten; een assenvlak bevat steeds 2 normalen. Bevat omgekeerd een vlak 2 normalen, dan is dat vlak een assenvlak. Snijden 2 normalen elkaar, dan is de verbindingslijn der voetpunten een as; zijn omgekeerd 2 punten der hyperellipsoïde door een as verbonden, dan zullen de normalen, in die punten aan de hyperellipsoïde opgericht, elkaar snijden.

§ 62. Wij noemen weer $\mathfrak{A}$ een willekeurige ruimte en α 't vlak, dat de voetpunten der in $\mathfrak{A}$ liggende normalen bevat; verder zij E de ellipsoïde, volgens welke $\mathfrak{A}$ de hyperellipsoïde $\mathfrak{E}$ snijdt en ε de ellips van doorsnee van 't vlak α met E. De normalen, in de punten van ε aan E opgericht, zijn nu tevens de in $\mathfrak{A}$ gelegen normalen aan $\mathfrak{E}$. Deze normalen vormen een regeloppervlak van den vierden graad (normalie) met een dubbelkromme van den derden graad; wij

hebben gezien, dat deze dubbelkromme kan ontaarden in een driemaal tellende rechte lijn (§ 15).

Bevat n.l. een vlakke doorsnede van een ellipsoïde 3 punten, wier normalen aan die ellipsoïde elkaar in een zelfde punt snijden, dan zal die vlakke doorsnede oneindig veel drietallen van punten bezitten, wier normalen elkaar in een zelfde punt snijden; de lijn, die de meetkundige plaats dezer snijpunten is, hebben wij in navolging van Desboves een synnormaal genoemd.

Een willekeurige ruimte 𝔄 bevat dus in 't algemeen geen enkel drietal van normalen, die elkaar in een zelfde punt snijden. Zijn er echter in 𝔄 3 normalen, die door een zelfde punt gaan, dan zijn er oneindig veel drietallen van normalen, die deze eigenschap bezitten.

De meetkundige plaats dezer snijpunten is een lijn, die wij de synnormaal der ruimte 𝔄 noemen.

Alleen de symmetrie-ruimten en $\mathfrak{R}_\infty$ bevatten meer dan 3 normalen, die door een zelfde punt gaan. Uit een punt van een symmetrie-ruimte kunnen wij 8 normalen neerlaten, waarvan er 6 in die ruimte liggen, terwijl de beide andere ten opzichte van die ruimte symmetrisch zijn gelegen. Van de 8 normalen, die wij uit een punt van $\mathfrak{R}_\infty$ kunnen trekken, liggen er 6 in $\mathfrak{R}_\infty$, terwijl de beide andere normalen zijn in de uiteinden van een middellijn.

§ 63. Wij willen nu de meetkundige plaats bepalen der ruimten, die een synnormaal bezitten.

Daarvoor noemen wij P een willekeurig punt en $V_1, V_2 \ldots V_8$ de voetpunten der normalen uit P op de hyperellipsoïde neergelaten. Door 't vlak PV_1V_2 kunnen wij 6 ruimten aanbrengen, die een synnormaal bezitten; het zijn de ruimten $PV_1V_2V_i$, waarin $i = 3, 4, 5, 6, 7$ of 8 is. In elk dier ruimten zijn nl. 3 normalen aan te wijzen, die door een zelfde punt gaan.

De ruimten, die een synnormaal bezitten, omhullen dus een gebogen ruimte van de zesde klasse.

§ 64. Uit een willekeurig punt P kunnen wij 8 normalen op 𝔈 neerlaten; de voetpunten dezer normalen kunnen wij verdeelen over 2 ruimten, die er elk 4 bevatten. Nu rijst de vraag, of ook elke ruimte de voetpunten van 4 elkaar in een zelfde punt snijdende normalen bevat.

Ter beantwoording van deze vraag gaan wij terug tot de ruimte van 3 afmetingen; hierin noemen wij E een ellipsoïde en α een willekeurig vlak.

Wij beschouwen den vlakkenbundel van de derde klasse, waarvan elk vlak 2 der normalen bevat, wier voetpunten in α liggen; wij weten, dat de centra dezer vlakken een rechte lijn vormen. Deze lijn heeft 4 snijpunten met het normopolaire oppervlak; elk dier punten is 't centrum van een vlak, dat oneindig veel drietallen van voetpunten van elkaar snijdende normalen bevat, daar 't normopolaire oppervlak de meetkundige plaats is der polen en der centra van de vlakken, wier doorsneden met E drietallen van punten bevatten, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen (§ 18).

Onder de vlakken van dezen bundel komen er dus 4 voor, die raakvlakken zijn van 't oppervlak, dat wij Φ_4 noemden (§ 18). Deze 4 vlakken willen wij nader bepalen.

Wij noemen A de pool van α en α' 't vlak, waarvan A 't centrum is. In α' trekken wij de normalen; 't snijpunt dier normalen noemen wij Q en de voetpunten der andere normalen, uit Q op E neergelaten, V_3, V_4, V_5 en V_6. Laten wij nu uit de pool van een der zijvlakken van het tetraëder $V_3V_4V_5V_6$ een loodlijn neer op zijn poolvlak, dan zal 't punt A in die loodlijn liggen (§ 40, laatste stelling). Hieruit volgt, dat de zijvlakken van dit tetraëder deel uitmaken van den vlakkenbundel, waarvan elk vlak 2 der normalen bevat, wier voetpunten in α liggen. Bovendien zijn de zijvlakken van dit tetraëder raakvlakken van Φ_4; ze zijn dus de vlakken, die wij nader wilden aangeven.

Hiermee is dus bewezen de volgende hulpstelling:

»*Snijden wij een ellipsoïde E door een vlak* α *en brengen wij den vlakkenbundel aan, waarvan elk vlak 2 der normalen bevat, wier voetpunten in* α *liggen, dan komen er onder de vlakken van dezen bundel 4 voor, die tegelijkertijd raakvlakken zijn van 't oppervlak* Φ_4. *Deze 4 vlakken vormen een tetraëder, dat in E is ingeschreven.*

De normalen, in de hoekpunten van dit tetraëder aan E opgericht, snijden elkaar in een zelfde punt.«

§ 65. Wij snijden nu de hyperellipsoïde $\mathfrak{E}$ door een ruimte $\mathfrak{A}$ volgens een ellipsoïde *E*. Zijn nu V_1, V_2 en V_3 punten van *E*, wier normalen aan $\mathfrak{E}$ elkaar in een zelfde punt Q snijden, dan moet 't vlak $V_1V_2V_3$ een assenvlak zijn; brengen wij n.l. de ruimte $V_1V_2V_3Q$ aan, dan zal 't vlak $V_1V_2V_3$ de voetpunten der in die ruimte gelegen normalen bevatten en dus een assenvlak zijn. In de ruimte $\mathfrak{A}$ worden de assenvlakken gevormd door de vlakken, die elk 2 der normalen bevatten, wier voetpunten in een bepaald vlak α liggen. Zijn nu in een dier assenvlakken V_1, V_2 en V_3 punten, wier normalen aan *E* elkaar in een zelfde punt snijden, dan zullen ook de normalen, in die punten aan $\mathfrak{E}$ opgericht, elkaar in een zelfde punt snijden, daar alle normalen in de punten der doorsnee van een assenvlak in een zelfde ruimte liggen (§ 60).

Onder de vlakken van den vlakkenbundel, die elk 2 der normalen aan *E* bevatten, wier voetpunten in α liggen, komen er (volgens § 64) 4 voor, die drietallen van punten bevatten, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen. Uit 't voorafgaande volgt, dat ook de normalen, in deze punten aan $\mathfrak{E}$ opgericht, elkaar drie aan drie in een zelfde punt snijden; de 4 vlakken, waarin deze punten liggen, vormen een tetraëder, waarvan de hoekpunten ons een viertal van punten geven, wier normalen aan *E*, dus ook aan $\mathfrak{E}$, elkaar in een zelfde punt snijden.

Dus: »*snijden wij de hyperellipsoïde* $\mathfrak{E}$ *door een ruimte* $\mathfrak{A}$, *dan bevat* $\mathfrak{A}$ *steeds 4 punten, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen.*«

Uit 't voorgaande blijkt ook, dat $\mathfrak{A}$ slechts één viertal van punten heeft, dat deze eigenschap bezit. Met uitzondering van de symmetrie-ruimten en $\mathfrak{R}_\infty$ bevat geen enkele ruimte meer dan 4 punten, wier normalen door een zelfde punt gaan.

§ 66. Uit § 64 volgt, hoe wij in een ruimte $\mathfrak{A}$ de 4 punten kunnen bepalen, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen. Daarvoor laten wij uit A, de pool van $\mathfrak{A}$, een loodlijn op $\mathfrak{A}$ neer; het voetpunt noemen wij V. Wij bepalen 't vlak, welks centrum V is ten opzichte van de symmetrie-vlakken der in $\mathfrak{A}$ liggende ellipsoïde E. In dat vlak trekken wij de normalen aan E, die elkaar in Q snijden; uit Q trekken wij de 4 andere normalen aan E; de voetpunten dezer normalen zijn de gevraagde punten.

Heeft de ruimte $\mathfrak{A}$ een synnormaal s, dan kunnen wij eenvoudiger te werk gaan; de synnormaal s snijdt E in 2 punten, waarvan er één ligt in 't vlak α, dat de voetpunten der in $\mathfrak{A}$ liggende normalen bevat.

Is V_1 't andere snijpunt van s met E, dan kunnen wij uit V_1 nog 3 normalen aan E trekken, wier voetpunten in α liggen. Deze 3 voetpunten vormen met V_1 de gevraagde vier punten.

§ 67. Laten wij uit een willekeurig punt P de normalen op $\mathfrak{E}$ neer, dan kunnen wij de 8 voetpunten dezer normalen over 2 ruimten verdeelen.

Verstaan wij onder »centrum» van een ruimte: »'t punt, welks coördidaten de tegengestelde zijn van de stukken, door die ruimte van de coördinaatassen afgesneden«, dan kunnen wij de volgende stelling bewijzen:

»*Laten wij uit een willekeurig punt 8 normalen op een hyperellipsoïde neer en brengen wij 2 ruimten aan, die elk 4 der voetpunten van deze normalen bevatten, dan is de pool van de eene ruimte steeds 't centrum van de andere*«.

Om dit te bewijzen gaan wij uit van de volgende hulpstelling:

»Hebben 3 vierdimensionale ruimten van den tweeden graad een kwadratisch oppervlak gemeen, dan zullen de 3 ruimten, waarvan elk een kwadratisch oppervlak bevat, dat de rest der doorsnee is van 2 dier ruimten, een vlak gemeen hebben.«

Bovenstaande hulpstelling is onmiddellijk te bewijzen door de geheele figuur te snijden door een willekeurig vlak. Men vindt dan, door een bekende stelling toe te passen omtrent 3 kegelsneden, die 2 punten gemeen hebben (zie o. a. § 17, fig. 6), dat dit vlak de drie ruimten der aanvullings-doorsneden snijdt volgens drie lijnen, die elkaar in een zelfde punt snijden; hieruit volgt, dat deze 3 ruimten een vlak gemeen hebben.

Beschouwen wij nu 2 vierdimensionale ruimten $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{F}$ van den tweeden graad, die een kwadratisch oppervlak G gemeen hebben en een gewrongen kromme van den vierden graad R_4, die dit gemeenschappelijk oppervlak in 4 punten snijdt, dan kunnen wij, door een derde ruimte van den tweeden graad door G en R_4 te brengen, het bewijs leveren van de hulpstelling:

»Hebben 2 vierdimensionale ruimten $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{F}$ van den tweeden graad een kwadratisch oppervlak gemeen en worden zij in vier der punten van dit gemeenschappelijk oppervlak door een gewrongen kromme van den vierden graad R_4 gesneden, dan zullen de volgende ruimten elkaar volgens een zelfde vlak snijden:

1°. de ruimte, die de rest der doorsnee van $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{F}$ bevat;

2°. de ruimte, die de andere 4 snijpunten van $\mathfrak{E}$ en R_4 bevat;

3°. de ruimte, die de andere 4 snijpunten van $\mathfrak{F}$ en R_4 bevat.«

In een ruimte $\mathfrak{A}$ stellen nu V_1, V_2, V_3 en V_4 de voetpunten voor der 4 normalen aan de hyperellipsoïde $\mathfrak{E}$, die

elkaar in een zelfde punt P snijden. De ruimte $\mathfrak{A}$ snijdt een der symmetrie-ruimten, b. v. de ruimte OXYZ, volgens een vlak α en het vlak XOY volgens een lijn a; de snijpunten van a met de hoofdellips in 't vlak XOY noemen wij A en B. 't Punt, dat diametraal tegenover A ligt, noemen we A'; 't punt, dat ten opzichte van de X-as symmetrisch gelegen is met B, heet B_1. 't Vlak α snijdt $\mathfrak{E}$ volgens een ellips ε; door ε en de lijnen AA' en BB_1 kunnen wij oneindig veel oppervlakken van den tweeden graad brengen; uit dezen bundel van oppervlakken kiezen wij er een willekeurig uit. Door dit oppervlak en de ellipsoïde, volgens welke $\mathfrak{E}$ door de ruimte $\mathfrak{A}$ gesneden wordt, zijn weer oneindig veel ruimten van den tweeden graad te brengen, daar deze beide oppervlakken de ellips ε gemeen hebben; uit dezen bundel van gebogen ruimten kiezen we er weer een willekeurig uit en noemen ze $\mathfrak{F}$.

De hierboven afgeleide stelling passen wij nu toe op de ruimten $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{F}$, en de ruimtekromme R_4, die de polen bevat der assen, die door 't punt P gaan. De ruimte, die de rest van de doorsnede van $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{F}$ bevat, zal ook de lijn $A'B_1$ bevatten; de ruimte, die de 4 andere snijpunten van $\mathfrak{F}$ en R_4 bevat, gaat door de Y-as; 't punt C, snijpunt van de Y-as en de lijn $A'B_1$, ligt dus in de ruimte $\mathfrak{A}'$, die door de 4 verdere snijpunten van R_4 met $\mathfrak{E}$ gebracht kan worden.

De snijpunten van de ruimte $\mathfrak{A}'$ met de andere symmetrie-assen zijn op dezelfde wijze te bepalen; uit deze voortbrenging van $\mathfrak{A}'$ volgt, dat de pool van $\mathfrak{A}$ 't centrum van $\mathfrak{A}'$ is.

§ 68. In de §§ 39—43 zijn eenige stellingen afgeleid, wier analoga in de vierdimensionale ruimte langs geheel denzelfden weg te bewijzen zijn. Daarom vermeld ik hier alleen de voornaamste resultaten:

I. »Doorloopt een punt een gewrongen kromme van den vierden graad, waarop de oorsprong en de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen liggen, dan wentelt

de ruimte, waarvan dat punt 't centrum is, om een vlak«.

En omgekeerd:

II. »Wentelt een ruimte om een vlak, dan doorloopt 't punt, dat 't centrum van deze ruimte is, een gewrongen kromme van den vierden graad, waarop de oorsprong en de oneindig ver gelegen punten der symmetrie-assen liggen«.

III. »Zijn V_1, V_2,.... V_8 de voetpunten der normalen, uit een willekeurig punt P op een hyperellipsoïde 𝔈 neergelaten, dan snijden de loodlijnen, uit de polen van de ruimten $V_1V_2V_3V_4$, $V_1V_2V_3V_5$, $V_1V_2V_4V_5$, $V_1V_3V_4V_5$ en $V_2V_3V_4V_5$ op hunne poolruimten neergelaten, elkaar in een zelfde punt. Dat punt is 't centrum van de ruimte $PV_6V_7V_8$«.

IV. »Doorloopt een punt de gewrongen kromme van den vierden graad, die de polen bevat van alle door A gaande assen, dan wentelt de ruimte, waarvan dat punt 't centrum is, om een assenvlak. Dat assenvlak bevat de voetpunten der normalen, die gelegen zijn in 𝔄', de ruimte waarvan A 't centrum is«.

§ 69. Uit een willekeurig punt P laten wij nu de normalen op 𝔈 neer; de voetpunten noemen wij $V_1, V_2 .. V_8$. Door V_1, V_2, V_3 en V_4 brengen wij de ruimte 𝔄 en door de 4 andere voetpunten de ruimte 𝔄'.

De polen dezer ruimten noemen wij A en A'; A, de pool van 𝔄, is tevens 't centrum van 𝔄', A' van 𝔄. Op 𝔄 projecteeren wij nu de punten A en P; de projecties dier punten heeten A_p en P_p, E is de ellipsoïde, volgens welke 𝔈 door 𝔄 gesneden wordt.

Uit P_p kunnen wij 6 normalen op E neerlaten; 4 dezer voetpunten zijn de punten V_1, V_2, V_3 en V_4, terwijl de beide anderen met P_p liggen in 't vlak, waarvan A_p 't centrum is ten opzichte van de symmetrie-vlakken der ellipsoïde E (§ 66).

Brengen wij nu door de punten V_1, V_2, V_3, V_4 en V_5 een bolruimte, dan snijdt 𝔄 deze bolruimte volgens een

bol, waarop de punten V_1, V_2, V_3 en V_4 liggen. 't Middelpunt van dezen bol is 't punt N_p, dat 't midden is der lijn P_pA_p (§ 44). 't Middelpunt N der bolruimte door V_1, V_2, V_3, V_4, en V_5 ligt dus in de lijn, die in N_p loodrecht op de ruimte 𝔄 is opgericht. De lijn PN snijdt dus A A_p. Op dezelfde wijze kunnen wij aantoonen, dat PN de loodlijnen snijden zal, uit de polen der ruimten $V_1V_2V_3V_5$, $V_1V_2V_4V_5$, $V_1V_3V_4V_5$ en $V_1V_2V_3V_4$ op hare poolruimten neergelaten. Dat die 4 loodlijnen en A A_p elkaar in een zelfde punt snijden, wisten wij, en ook dat dit snijpunt 't centrum der ruimte $PV_6V_7V_8$ is (§ 68, III). Noemen wij dat snijpunt Q, dan is N 't midden der lijn PQ.

Aan de stelling van Laguerre, in § 44 bewezen, kunnen wij dus de volgende uitbreiding geven:

Laten wij uit een punt P 8 normalen op een hyperellipsoïde 𝔈 neer en brengen wij een bolruimte door de voetpunten van 5 dier normalen, dan is 't middelpunt van die bolruimte 't midden van de lijn, die P verbindt met 't centrum van de ruimte, die de 3 andere normalen bevat.

Ook aan de tweede stelling van Laguerre — zie § 45*a* — kunnen wij een dergelijke uitbreiding geven.

Daar 't bewijs hiervoor volkomen overeenkomt met 't daar voorkomend bewijs, vermeld ik alleen de stelling zelve:

Laten wij uit een punt P de normalen op een hyperellipsoïde neer en brengen wij een bolruimte door de voetpunten van 5 dezer normalen, dan zal deze bolruimte de kromme, die de polen der door P gaande assen bevat, in nog 3 punten snijden; de ruimte, door deze 3 punten en 't middelpunt der hyperellipsoïde gebracht, zal dan evenwijdig zijn aan de ruimte, die de 3 andere normalen bevat.

§ 70. Wij nemen nu een willekeurige lijn *l* aan en vragen naar den graad der kromme, volgens welke *l* zich op

𝔈 projecteert. Brengen wij door l een ruimte 𝔄, dan vormen de normalen aan 𝔈, die in 𝔄 liggen, een regeloppervlak van den vierden graad (§ 59).

De ruimte 𝔄 bevat dus van de projectie van l op 𝔈 6 punten, n.l. de voetpunten van 4 normalen, die geheel in haar liggen, benevens de snijpunten van l en 𝔈.

De projectie van een willekeurige lijn l op een hyperellipsoïde 𝔈 is dus een kromme van den zesden graad.

Projecteeren wij nu op 𝔈 een lijn s, die de synnormaal is van een ruimte 𝔄, dan ontaardt deze projectie in een kegelsnede, die in 𝔄 gelegen is, en een gewrongen kromme van den vierden graad. Van de 8 voetpunten der normalen, uit eenig punt van s getrokken, liggen er 3 op de kegelsnede en 5 op de kromme van den vierden graad.

§ 71. Wij bewijzen nu eerst de volgende hulpstelling: »Bestaat op een gewrongen kromme ρ_4 van den vierden graad een involutie van den vijfden graad, waarbij de 4 in 't oneindige gelegen punten van ρ_4 deel uitmaken van een zelfde vijftal, dan zullen alle bolruimten, die ρ_4 snijden in 5 toegevoegde punten, nog 3 snijpunten met ρ_4 hebben, die aan allen gemeenschappelijk zijn.«

Om dit te bewijzen denken wij ons alle lijnen, die ρ_4 snijden in 2 punten, die tot een zelfde vijftal van toegevoegde punten behooren.

Uit een willekeurige koorde PQ van ρ_4 projecteeren wij al die lijnen; de op deze wijze voortgebrachte ruimten zijn de raakruimten van een kegelruimte (van de tweede soort) van de vierde klasse, die PQ tot toplijn heeft.

Nu brengen wij een bolruimte aan door 5 toegevoegde punten V_1, V_2, V_3, V_4 en V_5; deze bolruimte snijdt dan ρ_4 nog in 3 punten, die wij A, B en C noemen. Door A, B en C en nog 2 punten van ρ_4, W_1 en W_2, brengen wij een tweede bolruimte; we kiezen W_1 en W_2 zoo, dat

ze behooren tot een zelfde vijftal van toegevoegde punten; overigens zijn ze willekeurig. Tezamen bepalen deze 2 bolruimten een bundel; elke bolruimte uit dezen bundel snijdt ρ_4 in 8 punten, waarvan echter A, B en C vast zijn. Op ρ_4 ontstaat dus een nieuwe involutie van den vijfden graad; de in 't oneindige gelegen punten van ρ_4 maken weer deel uit van een zelfde groep.

De lijnen, die de toegevoegde punten dezer nieuwe involutie onderling verbinden, projecteeren wij weer uit PQ; de hierdoor voortgebrachte ruimten raken weer een kegelruimte (van de twee soort) van de vierde klasse, die PQ tot toplijn heeft. Deze kegelruimte heeft echter met de vorige 17 raakruimten gemeen, n.l. de 10 ruimten, waardoor de lijnen V_iV_k geprojecteerd worden, de ruimte PQW_1W_2 en de 6 ruimten, die de in 't oneindige gelegen koorden van ρ_4 projecteeren.

De beide kegels hebben dus al hun raakruimten gemeen, en de involuties op ρ_4 vallen samen. Alle bolruimten van den bundel zullen dus ρ_4 snijden in 5 toegevoegde punten der involutie en verder nog in 3 vaste punten. Hiermee is de hulpstelling bewezen.

Uit een willekeurig punt P laten wij nu 8 normalen op $\mathfrak{E}$ neer; de voetpunten zijn V_1, V_2, ... V_8. Door V_1, V_2 en V_8 brengen wij een vlak α; de ruimte, die de normalen bevat, waarvan de voetpunten in α liggen, noemen wij $\mathfrak{A}$.

De normalen in $\mathfrak{A}$ snijden elkaar dan 3 aan 3 in de punten eener synnormaal *s*, waarop P ligt. Wij laten nu P de lijn *s* beschrijven, en brengen dan telkens een cirkel door de 3 voetpunten, die in α liggen; deze cirkels vormen een bundel en hebben allen met $\mathfrak{E}$ nog 't punt C gemeen, welks normaal evenwijdig aan *s* is (§ 20). De synnormaal *s* projecteert zich op $\mathfrak{E}$, behalve volgens de kegelsnee in α, nog volgens een gewrongen kromme R_4, waarop de voetpunten der normalen, uit de punten van *s* neergelaten, een

involutie van den vijfden graad vormen. Wij brengen nu bolruimten aan door de vijftallen van toegevoegde punten dezer involutie; uit de voorafgaande hulpstelling volgt, dat al deze bolruimten een bundel vormen en R_4 nog snijden in 3 punten, die ze alle gemeenschappelijk hebben.

't Punt C′, diametraal tegenover C gelegen, vormt met de in 't oneindige gelegen punten van R_4 een groep van toegevoegde punten der involutie; de ruimte, die den basisbol van den bundel bevat, heeft dus met R_4 't punt C′ en de 3 vaste punten gemeen. Verder volgt uit § 69 dat de meetkundige plaats der middelpunten van deze bolruimten de lijn is, die evenwijdig aan *s* getrokken is en den afstand van *s* tot A′, 't centrum van 𝔄, halveert. De ruimte, die den basisbol van den bundel bevat, is dus de ruimte, die door C′ loodrecht op de meetkundige plaats der middelpunten aan te brengen is; deze ruimte is dus ook loodrecht op *s*, en eindelijk ook loodrecht op de normalen aan 𝔈 in C en C′. Wij kunnen dus ook zeggen, dat de basisbol van den bundel ligt in de raakruimte in C′ aan 𝔈. Deze ruimte raakt R_4 in C′; C′ is dus zelf een der vaste snijpunten van al deze bolruimten met R_4; de beide andere vaste punten zijn onbestaanbaar, daar de raakruimte in C′ met R_4, die geheel op 𝔈 ligt, geen enkel bestaanbaar punt meer gemeen kan hebben.

Hiermee zijn dus bewezen de volgende stellingen:

I. *Laten wij uit een punt P de normalen op een hyperellipsoïde 𝔈 neer en brengen wij door 3 der voetpunten een cirkel, dan ligt 't diametraal tegenover gelegen punt van 't vierde snijpunt van dezen cirkel met 𝔈 op de bolruimte, die door de 5 andere voetpunten gebracht kan worden.*

II. *Is s een synnormaal, die zich op 𝔈 projecteert volgens een vlakke kromme ε en een gewrongen kromme R_4, dan zullen de bolruimten, die R_4 snijden in de voetpunten van 5 in een zelfde punt van s samenkomende normalen, een bundel vormen en allen nog 3 vaste punten met R_4 gemeen*

hebben. Van deze 3 punten is slechts één punt C bestaanbaar; de normaal in C is evenwijdig aan s.

III. *Al deze bolruimten hebben een bol gemeen, gelegen in de ruimte, die* 𝔈 *in C aanraakt.*

§ 72. Wij hebben gezien, dat een willekeurige lijn zich op 𝔈 projecteert volgens een gewrongen kromme van den zesden graad en die projectie ontaardt in een vlakke kromme en een gewrongen kromme R_4 van den vierden graad, als de geprojecteerde lijn een synnormaal is. Wij willen nu nagaan:

1°. of R_4 ook in één ruimte kan liggen;

2°. of R_4 ook weer ontaarden kan in twee vlakke krommen.

Voorloopig onderstellen wij, dat de synnormaal *s*, die wij op 𝔈 projecteeren, niet in een der symmetrie-ruimten of in de oneindig ver gelegen ruimte $\mathfrak{R}_\infty$ ligt.

Stellen wij dat R_4 een ruimtekromme is, dan moeten in de ruimte, die R_4 bevat, de voetpunten liggen van oneindig veel vijftallen van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen. Wij weten, dat behalve de symmetrie-ruimten en $\mathfrak{R}_\infty$ geen enkele ruimte aan dezen eisch voldoet; R_4 moet dus in een dezer ruimten liggen, wat onmogelijk is, tenzij *s* in dezelfde ruimte ligt.

De kromme van den vierden graad, die een gedeelte der projectie van een synnormaal s op 𝔈 *vormt, kan dus geen ruimtekromme zijn, tenzij s in een der symmetrie-ruimten of in* $\mathfrak{R}_\infty$ *ligt.*

Onderstellen wij nu, dat R_4 zich splitst in 2 vlakke krommen van den tweeden graad. In eenig punt P van *s* zullen 8 normalen elkaar snijden; 3 der voetpunten van deze normalen kunnen dan liggen op een vlakke kromme $\varkappa_2$, 3 op een andere λ_2, en 2 op een derde vlakke kromme μ_2. Hieruit volgt, dat elk punt van *s* zich op 𝔈 zal projecteeren in 8 punten, waarvan er 3 op $\varkappa_2$, 3 op λ_2 en 2 op

μ_2 liggen. Brengen wij nu door μ_2 een ruimte $\mathfrak{A}$, dan zal die ruimte $\mathfrak{E}$ snijden volgens een ellipsoïde E; de projectie s_p van de lijn s op $\mathfrak{A}$ heeft nu de eigenschap, dat elk harer punten 't snijpunt is van 2 normalen aan E, wier voetpunten op μ_2 liggen. Dit is echter alleen mogelijk, als 't vlak, dat μ_2 bevat, loodrecht staat op een der symmetrie-vlakken van E — in welk geval s_p in dat symmetrievlak ligt — of als μ_2 in een middelvlak ligt, in welk geval s_p oneindig ver verwijderd is. Daar wij de ruimte $\mathfrak{A}$ willekeurig door μ_2 hebben aangebracht, volgt hieruit, dat μ_2 loodrecht op een der symmetrie-ruimten van $\mathfrak{E}$ staat of in een middelvlak ligt; dan moet echter s in een symmetrie-ruimte of in $\mathfrak{R}_\infty$ liggen.

De projectie op een hyperellipsoïde $\mathfrak{E}$ van een lijn s, die niet in een der symmetrie-ruimten of in $\mathfrak{R}_\infty$ ligt, kan niet ontaarden in 3 vlakke krommen.

§ 73. Projecteeren wij nu een lijn, gelegen in een der symmetrie-ruimten op $\mathfrak{E}$, dan is 't duidelijk, dat die projectie bestaan zal uit een ruimtekromme, geheel in die symmetrie-ruimte gelegen, en een vlakke kromme, waarvan 't vlak loodrecht op die ruimte staat. Deze ruimtekromme kan nog ontaarden in 2 vlakke krommen, zoodat de projectie van een lijn, die in een symmetrie-ruimte ligt, in 3 vlakke krommen kan ontaarden. Een lijn in $\mathfrak{R}_\infty$ projecteert zich volgens een vlakke kromme, die in een middelvlak ligt, en een kromme van den vierden graad in $\mathfrak{R}_\infty$. Ook hier kan zich 't geval voordoen, dat de projectie in 3 vlakke krommen ontaardt.

De projectie van een lijn, die in een der symmetrie-ruimten of in $\mathfrak{R}_\infty$ ligt, kan ontaarden in drie vlakke krommen.

§ 74. Wij kunnen hier de vraag stellen, of 't mogelijk is, dat de gewrongen kromme van den zesden graad, die de projectie is van een lijn l op een hyperellipsoïde $\mathfrak{E}$, ontaardt in 2 (onbestaanbare) ruimtekrommen van den derden graad.

Wij onderstellen, dat dit mogelijk is; de »halve projecties» van l noemen we R_3 en R'_3 en de beide ruimten, die deze krommen bevatten, $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}'$. Nemen wij op l een punt P, dan moeten 4 van de voetpunten der uit P op de hyperellipsoïde $\mathfrak{E}$ neergelaten normalen op R_3 en de 4 anderen op R'_3 liggen; een andere verdeeling is niet mogelijk, tenzij $\mathfrak{A}$ of $\mathfrak{A}'$ een symmetrie-ruimte of de oneindig ver gelegen ruimte $\mathfrak{R}_\infty$ is. Verplaatsen wij nu P langs l, dan verplaatsen de voetpunten der uit P getrokken normalen zich langs R_3 en R'_3; in de ruimten $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}'$ zijn dan oneindig veel viertallen van punten van $\mathfrak{E}$, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen.

Wij hebben echter gezien, dat een willekeurige ruimte slechts één viertal van punten bevat, die deze eigenschap bezitten; de projectie van een lijn op een hyperellipsoïde kan dus niet ontaarden in twee ruimtekrommen van den derden graad, tenzij een van beiden in een symmetrie-ruimte of in $\mathfrak{R}_\infty$ ligt.

Zal echter een der beide halve projecties van l in een symmetrie-ruimte of in $\mathfrak{R}_\infty$ liggen, dan moet l in dezelfde ruimte gelegen zijn.

Geen enkele lijn, die niet in een symmetrie-ruimte van $\mathfrak{E}$ *of in* $\mathfrak{R}_\infty$ *ligt, projecteert zich op* $\mathfrak{E}$ *volgens 2 ruimtekrommen van den derden graad.*

Wij vragen nu of een lijn l, gelegen in een symmetrie-ruimte $\mathfrak{B}$, die $\mathfrak{E}$ snijdt volgens een ellipsoïde E, zich op $\mathfrak{E}$ projecteeren kan volgens 2 ruimtekrommen van den derden graad. Wij hebben gezien, dat deze ruimte een congruentie van lijnen bevat, waarvan de projecties op E bestaan uit een ruimtekromme van den derden graad en een rechte lijn (§ 33*a*, Opmerking). De projectie van een lijn dezer congruentie op $\mathfrak{E}$ wordt dus gevormd door een ruimtekromme van den derden graad en een lijn, beide gelegen in de symmetrie-ruimte $\mathfrak{B}$, en verder nog een kegelsnee, gelegen in een vlak, dat loodrecht op $\mathfrak{B}$ staat. Wij kunnen

dus de projectie van elke lijn dezer congruentie op $\mathfrak{E}$ beschouwen als te bestaan uit twee ruimtekrommen van den derden graad, waarbij een van beide op nieuw ontaard is in een kegelsnee en een rechte lijn.

Eveneens zal $\mathfrak{R}_\infty$ een congruentie van lijnen bevatten, wier projecties op $\mathfrak{E}$ opgevat kunnen worden als te bestaan uit 2 ruimtekrommen van den derden graad; een dezer ligt in $\mathfrak{R}_\infty$, terwijl de andere ontaardt in een lijn, ook in $\mathfrak{R}_\infty$ gelegen, en een kegelsnee, gelegen in een middelvlak.

§ 75. Op een vierdimensionale ruimte kunnen wij behalve lijnen ook nog vlakken projecteeren.

Projecteeren wij nu een vlak α op een hyperellipsoïde $\mathfrak{E}$, dan is 't duidelijk, dat de projectie een gewrongen oppervlak van den vierden graad moet zijn.

Brengen wij n.l. door α een ruimte $\mathfrak{B}$, dan is er in die ruimte een vlak β aan te wijzen, dat de voetpunten van alle in $\mathfrak{B}$ liggende normalen bevat. Van de projectie van α op $\mathfrak{E}$ ligt dus in de ruimte $\mathfrak{B}$ een ruimtekromme van den vierden graad, bestaande uit de vlakke doorsneden van α en β met $\mathfrak{E}$; de projectie is dus een gewrongen oppervlak van den vierden graad.

Dit oppervlak kunnen wij beschouwen als de doorsnee van $\mathfrak{E}$ met een andere ruimte van den tweeden graad, die wij daarom de projecteerende ruimte van α kunnen noemen. Wij brengen daarvoor door α weer de ruimte $\mathfrak{B}$; de pool van $\mathfrak{B}$ noemen wij B; uit B trekken wij de as b loodrecht op de ruimte $\mathfrak{B}$, en wij noemen B_∞ 't oneindig ver gelegen punt dezer as. Nu is β de doorsnede van $\mathfrak{B}$ met de aan B_∞ toegevoegde middelruimte.

Laten wij nu $\mathfrak{B}$ wentelen om α, dan doorloopt B_∞ de lijn, die in een loodrecht op α staand vlak oneindig ver ligt; de aan B_∞ toegevoegde middelruimte wentelt dan om een middelvlak. Deze bundel van middelruimten is projectief met den ruimtebundel α; tezamen brengen ze een kegelruimte (van de tweede soort) van den tweeden graad voort,

die α op $\mathfrak{E}$ projecteert volgens een gewrongen oppervlak van den vierden graad.

Tot zoover is de overeenstemming met 't analoge geval in de ruimte van 3 afmetingen volkomen; zij gaat echter niet verder. Onderstellen wij n.l. voorloopig, dat α niet in een der symmetrie-ruimten of in $\mathfrak{R}_{\infty}$ ligt, en vragen wij of de projectie van α op $\mathfrak{E}$ ontaarden kan in 2 oppervlakken van den tweeden graad, dan zien wij dadelijk, dat dit onmogelijk is. Alleen de uitgezonderde ruimten bevatten meer dan één viertal van punten, die voetpunten zijn van normalen, die elkaar in een zelfde punt snijden; 't vlak α moet dan echter ook in een dier ruimten liggen, opdat de projectie uit 2 oppervlakken van den tweeden graad zal kunnen bestaan.

Nemen wij nu 't vlak α in een der symmetrie-ruimten aan, dan ontaardt de projectie in 2 oppervlakken n.l. in de ellipsoïde in die ruimte en een ellipsoïde, gelegen in een ruimte, die loodrecht op de bedoelde symmetrie-ruimte staat; nemen wij ten slotte α in $\mathfrak{R}_{\infty}$ aan, dan bestaat de projectie op $\mathfrak{E}$ uit de onbestaanbare doorsnede van $\mathfrak{R}_{\infty}$ met $\mathfrak{E}$, en een ellipsoïde, gelegen in een middelruimte.

Opmerking: In § 16 hebben wij — om te bewijzen, dat een lijn zich op een ellipsoïde projecteert volgens een kromme van den vierden graad — de ellipsoïde om die lijn over een oneindig kleinen hoek gedraaid. Ook hier kunnen wij, om de projectie van een vlak α op de hyperellipsoïde $\mathfrak{E}$ te bepalen, dezen weg volgen. Draaien wij $\mathfrak{E}$ over een oneindig kleinen hoek om 't vlak α, dan zullen de beide standen van $\mathfrak{E}$ elkaar snijden volgens een gewrongen oppervlak van den vierden graad; dit oppervlak is de projectie van α op $\mathfrak{E}$.

Wij kunnen eveneens de projectie van een lijn l op $\mathfrak{E}$ langs dezen cinematischen weg nagaan. Daarvoor brengen wij door l 2 vlakken α en β; wij draaien $\mathfrak{E}$ om elk

dezer beide vlakken over een oneindig kleinen hoek. De 3 standen van $\mathfrak{E}$ hebben een gewrongen kromme van den achtsten graad gemeen; alle normalen, wier voetpunten in den omtrek van deze kromme liggen, snijden dus de vlakken α en β. Al deze normalen behoeven echter l niet te snijden; de normalen, die liggen in de ruimte, door de vlakken α en β gebracht, snijden l in 't algemeen niet. De voetpunten dezer normalen vormen een kegelsnee (§ 59); de projectie der lijn l op de hyperellipsoïde $\mathfrak{E}$ is dus een gewrongen kromme van den zesden graad.

§ 76. Om 't oppervlak te vinden, dat een lijn l op $\mathfrak{E}$ projecteert, beschouwen wij die lijn als de snijlijn van 2 vlakken α en β. De projecteerende ruimten van α en β zijn kegelruimten van den tweeden graad; zij hebben een vlak gemeen, n.l. 't vlak, dat in de door α en β gebrachte ruimte de voetpunten van alle in die ruimte gelegen normalen bevat. De beide projecteerende ruimten snijden elkaar dus verder nog volgens een gewrongen oppervlak van den derden graad F_3. Dit oppervlak kunnen wij 't projecteerend oppervlak van l noemen, want de snijkromme van F_3 en $\mathfrak{E}$ is de meetkundige plaats van de voetpunten der l snijdende normalen.

STELLINGEN.

I.

Het bewijs, dat Laguerre voor de stelling van Joachimsthal geeft, is onvolledig.

(Laguerre, Œuvres complètes II, pag. 473.)

II.

Is E een n-dimensionale gebogen ruimte van den tweeden graad met een middelpunt, dan zal elke $(n-1)$-dimensionale ruimte de voetpunten bevatten van n normalen aan E, die elkaar in een zelfde punt snijden, wanneer *n even* is;

daarentegen zal een ruimte van $(n-1)$ dimensies deze eigenschap in 't algemeen *niet* bezitten, als *n oneven* is.

III.

Is E een n-dimensionale gebogen ruimte van den tweeden graad met een middelpunt — waarbij wij *n even* veronderstellen —, dan zal elke $(n-1)$-dimensionale ruimte, die de voetpunten bevat van n normalen aan E, die elkaar in een zelfde punt snijden, oneindig veel groepen van n punten bevatten, die voetpunten zijn van elkaar in een zelfde punt snijdende normalen.

IV.

Wanneer wij onder 't »projecteerend oppervlak« van een lijn op een hyperellipsoïde verstaan 't regeloppervlak, gevormd door de normalen aan die hyperellipsoïde, die deze lijn snijden, dan is 't projecteerend oppervlak van een lijn een gewrongen regeloppervlak van den twaalfden graad; de »projecteerende ruimte« van een vlak is dan een gebogen ruimte van den twaalfden graad. [1])

V.

Men kan op een cirkelomtrek een involutie van den derden graad op de volgende wijze voortbrengen: in den cirkel wordt een driehoek ABC beschreven, waarvan een der zijden, b.v. AB, een middellijn is; hierna wordt op den cirkelomtrek een punt P aangenomen, zoodat CD evenwijdig aan AB is en eindelijk wordt de lijn *w* bepaald, die de Wallace-(Simpson-)lijn van P ten opzichte van driehoek ABC is. Door nu P en *w* als vast te beschouwen en driehoek ABC zoo te laten veranderen, dat *w* de Wallace-lijn van P ten opzichte van den veranderlijken driehoek blijft, bepalen wij op den cirkelomtrek een involutie van den derden graad.

Uit deze involutie zijn vele der belangrijkste eigenschappen van de normalen aan de ellips door projectie af te leiden.

---

[1]) Deze definitie van projecteerend oppervlak en projecteerende ruimte is een andere dan de op pag. 96 gegevene.

VI.

De stelling van Cavalieri komt bij de tegenwoordige behandeling der Stereometrie niet tot haar recht.

VII.

Bij 't bewijs van de stelling, dat n functies $y_1, y_2 \ldots y_n$ lineair afhankelijk moeten zijn, wanneer de volgende determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} & \cdots & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_n}{dx} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

gelijk nul is, maakt Forsyth ten onrechte gebruik van de stelling, dat een homogene lineaire differentiaal vergelijking van de n-de orde niet meer dan n onafhankelijke integralen kan hebben.

(Forsyth, A Treatise on Differential Equations, pag. 111.)

VIII.

De methode, die H. G. A. Verkaart geeft ter oplossing van een vergelijking van den vierden graad, is dikwijls

boven de oorspronkelijke methode van Descartes te verkiezen; ontbreekt echter in de vergelijking de tweede term, dan zijn beide methodes volkomen gelijkwaardig, daar de beide resolventen door een lineaire substitutie in elkaar overgaan.

(H. G. A. Verkaart, Wiskundig Tijdschrift, derde jaargang, No. 2).

IX.

Bij 't bewijs der stelling, dat de onmeetbare wortels van elke vierkantsvergelijking, waarvan de coëfficienten meetbare getallen zijn, door periodieke kettingbreuken kunnen worden uitgedrukt, gaat 't leerboek Lobatto—Rahusen uit van de veronderstelling, dat de vergelijking één wortel heeft tusschen de geheele getallen a en $a + 1$.

Hierna wordt opgemerkt, dat, indien de vergelijking tusschen a en $a + 1$ twee wortels mocht hebben, deze door de gevolgde behandelingswijze toch gescheiden zullen worden.

't Komt mij voor, dat 't bewijs, dat deze wortels steeds gescheiden zullen worden, onvoldoende is.

(Lobatto—Rahusen, Lessen over de Hoogere Algebra, vijfde druk, pag. 419).

X.

Mach's afleiding van de wet van Coulomb moet als mislukt worden aangemerkt.

(E. Mach, Grundriss der Naturlehre, pag. 195.)

XI.

De hypothese van Ampère, waardoor de magnetische werking wordt teruggebracht tot die van electrische stroomen is onaannemelijk.

XII.

't Is uit een wetenschappelijk oogpunt onwenschelijk, uit een didactisch oogpunt onmogelijk de mechanische natuuropvatting door de energetische te vervangen.

XIII.

De wijze, waarop E. Grimsehl het vraagstuk van eb en vloed behandelt, verschilt van de gebruikelijke hierin, dat een kleine fout, ontstaan door 't verwaarloozen van de beweging der aarde om 't gemeenschappelijke zwaartepunt van 't stelsel Aarde-Maan, vermeden wordt.

De hoofdfout, die deze in de meeste leerboeken voorkomende methode aankleeft, wordt echter ook bij Grimsehl aangetroffen.

(E. Grimsehl, Zeitschrift für Mathemathischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht, 38 Jahrgang, 3. Heft.)

XIV.

In de leerboeken der Trigonometrie behoort een degelijke behandeling der Goniometrie aan de behandeling der scheefhoekige driehoeken vooraf te gaan.

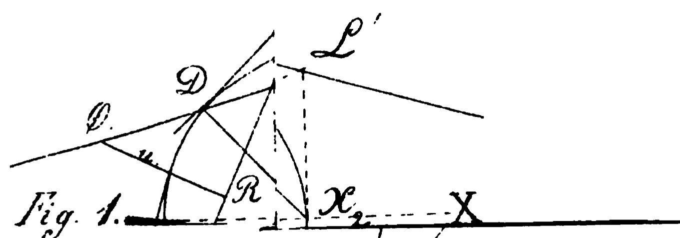
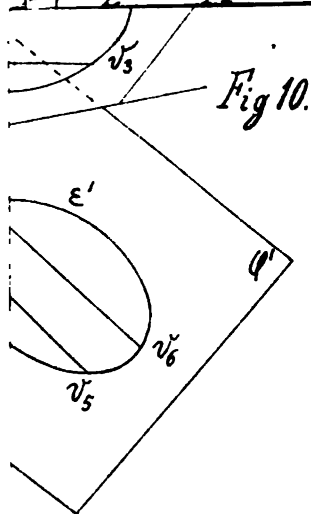
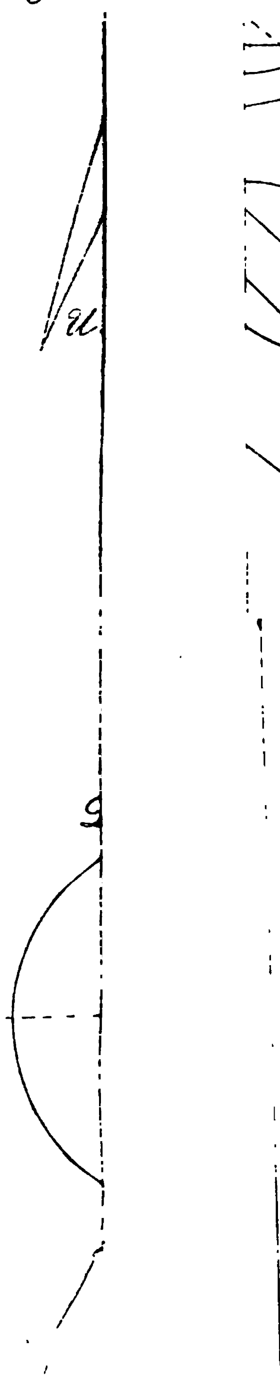


Fig. 1.
𝔏'
𝔇
𝔒.
u.
ℜ
$\mathfrak{X}_2$
X



v_3
Fig 10.
ε'
φ'
v_6
v_5



𝔘
𝔔



